Uitwerking

opg. 1

a $\underline{b} \in \mathrm{COL}(A) \iff A\underline{x} = \underline{b}$ is oplosbaar.

Beschouw derhalve:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 & -7 \\ -2 & -5 & -10 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 3-\beta^2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 3-\beta^2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 10 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 7-\beta^2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25-\beta^2 \end{array}\right]$$

Nu volgt: $\underline{b} \in \mathrm{COL}(A) \iff \boxed{\beta = 5 \text{ of } \beta = -5}$

b $\underline{\mathrm{NUL}(A)}$

Los op $A\underline{x} = \underline{o}$. Uit de veegpartij in onderdeel $\underline{a}$ volgt:

$$\begin{cases} x_1 = -6x_4 \\ x_2 = 2x_4 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_4 \\ x_4 \text{ is vrij} \end{cases}$$

Dus $\underline{x} \in \mathrm{NUL}(A) \iff \underline{x} = \lambda \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ met $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dit betekent dat $\mathrm{NUL}(A) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en

$\boxed{\left\{\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$ is een basis in $\mathrm{NUL}(A)$

$\underline{\mathrm{COL}(A)}$

$\boxed{\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}}$ is een basis in $\mathrm{COL}(A)$. Dit zijn nl. de pivotkolommen van A.

c $\mathrm{kol}_4 = 6\,\mathrm{kol}_1 - 2\,\mathrm{kol}_2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{kol}_3$, dus

$\boxed{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 \\ -10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}}$

Gebruik dat tijdens het vegen afhankelijkheidsrelaties tussen de kolommen bewaard blijven.

N.B. Deze afhankelijkheidsrelatie volgt ook uit het feit dat $\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \in NUL(A)$

Opg. 2 a) Waar,

immers $A^5 = (PBP^{-1})^5 = PB^5P^{-1}$

$= P\,B^3B^2P^{-1} = P\,O_{n,n}B^2P^{-1} = O_{n,n}$ $\boxtimes$

b) Waar,

immers $(I_n + C)(I_n - C) = I_n^2 - C + C - C^2$

$= I_n - C^2 = I_n - O_{n,n} = I_n$

en $(I_n - C)(I_n + C) = I_n^2 + C - C - C^2$

$= I_n - C^2 = I_n - O_{n,n} = I_n$

Hieruit volgt: $I_n + C$ is inverteerbaar en

$(I_n + C)^{-1} = I_n - C$ $\boxtimes$

c) Waar,

immers $\underline{v}\,\underline{v}^T = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha & 2\alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 2\alpha & 2 & 4 \end{bmatrix}$ $-\alpha$ -2

$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Nu ziet men dat $\underline{v}\,\underline{v}^T$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ 1 pivotpositie heeft, dus $\underline{v}\,\underline{v}^T\underline{x} = \underline{0}$ heeft voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ 2 vrije var.n! Dit impliceert dat voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ geldt dat $\dim(NUL(\underline{v}\,\underline{v}^T)) = 2$

$\boxtimes$

Opg. 3 a) Methode 1:

$\underline{e}_1 \xrightarrow{\text{proj}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rot.}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{e}_2 \xrightarrow{\text{proj.}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rot}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{e}_3 \xrightarrow{\text{proj.}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{rot}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Bijgevolg is de gevraagde standaard matrix

$$\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Methode 2:

De standaardmatrix van T is

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{rotatiematrix}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{projectiematrix}} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

b/ $\mathrm{Null}(T) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, dus een basis

van $\mathrm{Null}(T)$ is bijv. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$. Dit volgt

door op te lossen $\begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{0}$ of

uit een meetk. beschouwing.

$$R(T) = \left\{ \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} \;\middle|\; \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$= \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{e}_3 \right\}$$

Dus bijv. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{e}_3 \right\}$ is een basis van $R(T)$.

Dit volgt overigens ook uit een meetk. beschouwing.

Opg. 4 a Neem: $\underline{b}_1 = \underline{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$

$$\underline{b}_2 = \underline{a}_2 - \left(\frac{\underline{a}_2\cdot\underline{b}_1}{\underline{b}_1\cdot\underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_3 = \underline{a}_3 - \left(\frac{\underline{a}_3\cdot\underline{b}_1}{\underline{b}_1\cdot\underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 - \left(\frac{\underline{a}_3\cdot\underline{b}_2}{\underline{b}_2\cdot\underline{b}_2}\right)\underline{b}_2 = \begin{bmatrix}2\\-1\\6\\-1\end{bmatrix} - \underline{0} - \frac{6}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}2\\-3\\4\\1\end{bmatrix}$$

Dus $\boxed{\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\4\\1\end{bmatrix}\right\}}$ is een orthogonale basis in H

b $$\underline{v} = \left(\frac{\underline{c}\cdot\underline{b}_1}{\underline{b}_1\cdot\underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 + \left(\frac{\underline{c}\cdot\underline{b}_2}{\underline{b}_2\cdot\underline{b}_2}\right)\underline{b}_2 + \left(\frac{\underline{c}\cdot\underline{b}_3}{\underline{b}_3\cdot\underline{b}_3}\right)\underline{b}_3$$

$$= \frac{3}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{-6}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\-1\end{bmatrix} + \underline{0} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\3\end{bmatrix}$$

$$\underline{w} = \underline{c} - \underline{v} = \begin{bmatrix}4\\-1\\-2\\-3\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Dus } \underline{v} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-2\\3\end{bmatrix} \text{ en } \underline{w} = \begin{bmatrix}4\\-1\\-2\\-3\end{bmatrix}}$$

Opg. 5 Uit de gegevens volgt:
$\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{e}_1\}$ is een basis van $\mathbb{R}^4$,
$\underline{w} = \left(\frac{\underline{e}_1\cdot\underline{u}_1}{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_1}\right)\underline{u}_1 + \left(\frac{\underline{e}_2\cdot\underline{u}_2}{\underline{u}_2\cdot\underline{u}_2}\right)\underline{u}_2 + \left(\frac{\underline{e}_1\cdot\underline{u}_3}{\underline{u}_3\cdot\underline{u}_3}\right)\underline{u}_3$ is de component van $\underline{e}_1$ in W en $\underline{e}_1 - \underline{w}$ is de component van $\underline{e}_1$ in $W^\perp$ (omdat $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ een orthog. basis is van W). Daar bovendien geldt $\dim(W^\perp) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(W) = 4 - 3 = 1$ is bijv.
$\left\{\underline{e}_1 - \left(\frac{\underline{e}_1\cdot\underline{u}_1}{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_1}\right)\underline{u}_1 - \left(\frac{\underline{e}_1\cdot\underline{u}_2}{\underline{u}_2\cdot\underline{u}_2}\right)\underline{u}_2 - \left(\frac{\underline{e}_1\cdot\underline{u}_3}{\underline{u}_3\cdot\underline{u}_3}\right)\underline{u}_3\right\}$ een basis van $W^\perp$