Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tussentoets Lineaire Algebra, WI2273TA
Woensdag 4 november 2009, 14.00-16.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk onderdeel is (bij correcte beantwoording) 2 punten waard behalve onderdeel 4a, hiermee kunnen maximaal 3 punten worden verdiend.
- Het getal (score+3)/3, afgerond op 1 decimaal, geeft het eindresultaat.

---

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & \alpha \end{bmatrix}$ met $\alpha \in \mathbb{R}$ en de vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ \beta \end{bmatrix}$ met $\beta \in \mathbb{R}$.

a. Voor welke waarden van α en β is het stelsel lineaire vergelijkingen $A\underline{x} = \underline{b}$ strijdig?
b. Bepaal voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ de rang van A en de dimensie van $NUL(A)$.
Voor de volgende onderdelen nemen we $\alpha = -5$.
c. Bepaal de vectoren $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor het stelsel lineaire vergelijkingen $A\underline{x} = \underline{c}$ oplosbaar is.
d. Bepaal een basis van $COL(A)$ en van $NUL(A)$.

2. Bewijs of weerleg de volgende vier beweringen:

a. **Bewering 1**: Als $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$ en $\underline{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \\ h \end{bmatrix}$ dan is het stelsel vectoren $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ voor elke $h \in \mathbb{R}$ lineair afhankelijk.
b. **Bewering 2**: Als A en B twee willekeurige $n \times n-$ matrices zijn, geldt $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.
c. **Bewering 3**: De verzameling $H = \left\{ \begin{bmatrix} 3a - b + 3c \\ 6a + 12c \\ 2a + b + 7c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$.
d. **Bewering 4**: Als $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^n$, $W = Span\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ en $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ zodat $\underline{x} \perp \underline{a}$, $\underline{x} \perp \underline{b}$ en $\underline{x} \perp \underline{c}$ dan geldt: $\underline{x}$ staat loodrecht op elke vector $\underline{w}$ uit W.

3. Gegeven zijn de lineaire afbeeldingen $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Hierbij is S de afbeelding die vectoren uit $\mathbb{R}^2$ eerst spiegelt in $Span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ en vervolgens (hun spiegelbeeld) roteert om de oorsprong over een hoek van $\frac{\pi}{6}$ radialen (tegen de wijzers van de klok in). Afbeelding T is de matrixtransformatie die hoort bij matrix $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}$.

a. Bepaal de standaardmatrix (representatiematrix) van lineaire afbeelding S.

b. Bepaal een basis van $R(T)$, de beeldruimte van lineaire afbeelding T.

4. Gegeven zijn de matrix $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 11 \end{bmatrix}$ en de vector $\underline{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a. Ontbind vector $\underline{d}$ in een component $\underline{v} \in COL(B)$ en een component $\underline{w} \in COL(B)^{\perp}$.

b. Bepaal een basis van $COL(B)^{\perp}$, het orthogonale complement van $COL(B)$ in $\mathbb{R}^4$.

c. Bepaal de kleinste-kwadraten-oplossing(en) van het lineaire stelsel $B\underline{x} = \underline{d}$.