Uitwerking

opg. 1 a) Beschouw:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & \alpha & \beta \end{array}\right] \begin{array}{c} -3 \quad -1 \end{array} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & \alpha-2 & \beta-2 \end{array}\right] -1 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+5 & \beta-1 \end{array}\right]$$

Nu volgt: $A\underline{x} = \underline{b}$ is strijdig $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\alpha = -5 \text{ en } \beta \neq 1}$$

b) als $\alpha = -5$, dan $\text{Rang}(A) = 2$ en $\dim(\text{NUL}(A)) = 2$
als $\alpha \neq -5$, dan $\text{Rang}(A) = 3$ en $\dim(\text{NUL}(A)) = 1$

c) methode 1:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & c_1 \\ 3 & 5 & 1 & -1 & c_2 \\ 1 & 1 & 3 & -5 & c_3 \end{array}\right] \begin{array}{c} -3 \quad -1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & c_1 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & c_2 - 3c_1 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & c_3 - c_1 \end{array}\right] -1$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & c_1 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & c_2 - 3c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2c_1 - c_2 + c_3 \end{array}\right]$$

Nu volgt: $A\underline{x} = \underline{c}$ is oplosbaar $\Longleftrightarrow$
$2c_1 - c_2 + c_3 = 0 \Longleftrightarrow \underline{c} \in \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

methode 2:

$\text{COL}(A) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, dus volgt:

$A\underline{x} = \underline{c}$ is oplosbaar $\Longleftrightarrow$
$\underline{c} \in \text{COL}(A) \Longleftrightarrow \underline{c} \in \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

d) Een basis in $\text{COL}(A)$ is $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Verder geldt $\underline{x} \in \mathrm{NUL}(A) \iff A\underline{x} = \underline{0}$

Beschouw derhalve:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \underline{0} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{vegen}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \uparrow \\ +2 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -12 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -7x_3 + 12x_4 \\ x_2 = 4x_3 - 7x_4 \\ x_3 \text{ is vrij} \\ x_4 \text{ is vrij} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \underline{x} = x_3 \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 12 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ met } x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

Hieruit volgt dat $\left\{ \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ een basis is in $\mathrm{NUL}(A)$

opg. 2. a) waar, immers beschouw:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 \\ -1 & 2 & 7 & 3 \\ -2 & 2 & 9 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & h \end{bmatrix} \begin{array}{l} +1,\ +2,\ -3 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 \\ 0 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & -1 \\ 0 & -6 & -15 & h+9 \end{bmatrix} (\times \tfrac{1}{3})$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 25 & -1 \\ 0 & -6 & -15 & h+9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -5,\ +3 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h+9 \end{bmatrix} +(h+9)$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hieruit volgt dat voor elke $h \in \mathbb{R}$ geldt:

$\underline{v}_3 = -2\underline{v}_1 + 2\tfrac{1}{2}\underline{v}_2$.

Bijgevolg is $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ voor elke $h \in \mathbb{R}$ lineair afhankelijk. $\boxtimes$

b) Onjuist,

$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$.

Omdat i.h.a. $AB \neq BA$ (dit geldt ook voor $n \times n$-matrices) klopt de bewering niet.
Een tegenvoorbeeld wordt gegeven door:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ en } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dan geldt: $(A-B)(A+B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ en $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

☒

c) Waar, immers

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 3a - b + 3c \\ 6a \quad + 12c \\ 2a + b + 7c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}.$$ Bijgevolg is H

een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$. ☒

(N.B. Men kan uiteraard ook de definitie v/h begrip lineaire deelruimte gebruiken en de 3 noodzakelijke voorwaarden aantonen. Dat is wat meer werk)

d) Waar, immers

Zij $\underline{w} \in W$, dan kan men schrijven
$\underline{w} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c}$ voor zekere gewichten
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ en volgt:

$\underline{x} \cdot \underline{w} = \underline{x} \cdot (\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c})$

$= \lambda_1 (\underline{x} \cdot \underline{a}) + \lambda_2 (\underline{x} \cdot \underline{b}) + \lambda_3 (\underline{x} \cdot \underline{c})$

$= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 = 0$

Dit betekent dat $\underline{x} \perp W$

☒

Opg. 3 a) De standaardmatrix van $S = \begin{bmatrix} S(\underline{e}_1) & S(\underline{e}_2) \end{bmatrix}$

Verder geldt:

$$\underline{e}_1 \xrightarrow[\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}]{\text{Spiegeling}} -\underline{e}_2 \xrightarrow[\begin{bmatrix} \cos\pi/6 & -\sin\pi/6 \\ \sin\pi/6 & \cos\pi/6 \end{bmatrix}]{\text{Rotatie}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_2 \xrightarrow[\text{Spiegeling}]{} -\underline{e}_1 \xrightarrow[\text{Rotatie}]{} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Dus de gevraagde standaardmatrix is

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Als $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ geldt $T(\underline{x}) = A\underline{x} = x_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$

Hieruit volgt:

$R(T) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

Daar $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ onafhankelijk is, is dit een basis van $R(T)$

Opg. 4 a) Noem de kolommen van B resp. $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ en $\underline{b}_4$.

Dan geldt $\underline{b}_4 = 2\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3$, dus $\underline{b}_4$ is overbodig.

Verder is eenvoudig in te zien dat $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ onafh. is en dus een basis is van $\text{COL}(B)$.

Uit deze basis construeren we m.b.v. het G.S.-proces een orthogonale basis $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$ van $\text{COL}(B)$.

Daartoe definiëren we:

$$\underline{c}_1 = \underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_2 = \underline{b}_2 - \left(\frac{\underline{b}_2 \cdot \underline{c}_1}{\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1} \right) \underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{c}_3 = \underline{b}_3 - \left(\frac{\underline{b}_3 \cdot \underline{c}_1}{\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1}\right)\underline{c}_1 - \left(\frac{\underline{b}_3 \cdot \underline{c}_2}{\underline{c}_2 \cdot \underline{c}_2}\right)\underline{c}_2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} - \frac{6}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{15}{15}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nu is $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$ een orthogonale basis van $\mathrm{Col}(\mathbb{B})$,

en geldt:

$$\underline{v} = \left(\frac{\underline{d} \cdot \underline{c}_1}{\underline{c}_1 \cdot \underline{c}_1}\right)\underline{c}_1 + \left(\frac{\underline{d} \cdot \underline{c}_2}{\underline{c}_2 \cdot \underline{c}_2}\right)\underline{c}_2 + \left(\frac{\underline{d} \cdot \underline{c}_3}{\underline{c}_3 \cdot \underline{c}_3}\right)\underline{c}_3$$

$$= \frac{6}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{3}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

en $\underline{w} = \underline{d} - \underline{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

b/ Uit onderdeel a/ weten we dat $\dim(\mathrm{Col}(B)) = 3$ en $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{Col}(B)^{\perp}$. Omdat $\dim(\mathrm{Col}(B)^{\perp}) = 1$,

immers $\dim(\mathrm{Col}(B)) + \dim(\mathrm{Col}(B)^{\perp}) = 4$, volgt nu $\mathrm{Col}(B)^{\perp} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, en

bijv. $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis van $\mathrm{Col}(B)^{\perp}$

<u>NB</u> Uiteraard kan men ook $\mathrm{Nul}(B^T)$ bepalen, maar dat is meer werk

c/ <u>Methode 1:</u> Los op $B\underline{x} = \mathrm{proj}_{\mathrm{COL}(B)}(\underline{d})$

Bekijk daarom:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 11 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \\ -1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 9 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} +1 \\ +4 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 9 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1/3 \\ -3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (\times -1) \\ (\times \frac{1}{3}) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 2x_4 \\ x_2 = -1 - x_4 \\ x_3 = 1 - x_4 \\ x_4 \text{ is vrij} \end{cases}$$

Dus er zijn oneindig veel k.k.o $\underline{u}$, nl.

$$\underline{x}_{kko} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{met } x_4 \in \mathbb{R}$$

<u>Methode 2:</u> Los op $B^T B \underline{x} = B^T \underline{d}$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & 15 \\ 3 & 10 & 21 & 45 \\ 6 & 21 & 30 & 63 \\ 15 & 45 & 63 & 130 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 15 \\ 33 \end{bmatrix}$$

De aangevulde matrix van dit lineaire stelsel heeft dezelfde gereduceerde echelonvorm als de aangevulde matrix van methode 1. We vinden dus dezelfde k.k.o^n