Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tussentoets Lineaire Algebra, wi2273TA

Dinsdag 28 oktober 2008, 10.00-12.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- De normering vindt u na de vragen.
- Het getal (score +2.5)/2.5, afgerond op 1 decimaal, geeft het eindresultaat.

---

1. Gegeven is matrix $A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & \alpha \\ 1 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 2\alpha \end{bmatrix}$ met $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Bepaal voor elke reële waarde van α een basis van $COL(A)$ en van $ROW(A)$.

b. Neem $\alpha = 2$ en bepaal een basis van $NUL(A)$.

c. Neem $\alpha = 2$ en bepaal een basis van $(COL(A))^{\perp}$.

2. Bewijs of weerleg (d.m.v. een tegenvoorbeeld of een redenering die duidelijk maakt dat de bewering niet klopt) de volgende 4 beweringen:

a. **Bewering 1**: Als $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ een lineair onafhankelijk stelsel vectoren is in $\mathbb{R}^5$, dan is ook stelsel $\{\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \underline{v}_3 + \underline{v}_4, \underline{v}_4 + \underline{v}_1\}$ lineair onafhankelijk.

b. **Bewering 2**: Voor een willekeurige $n \times n$ – matrix B geldt: $I_n - B$ heeft inverse $I_n + B$ precies dan als $B = O_{n,n}$. (Uiteraard staan I_n en $O_{n,n}$ resp. voor een eenheidsmatrix en een nulmatrix)

c. **Bewering 3**: Als C een 7×5 – matrix is met 3 pivotposities, dan geldt $\dim(NUL(C^T)) = 2$.

d. **Bewering 4**: Als H een lineaire deelruimte is van $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ een **orthogonale** basis is van H, $\underline{x} \in H$ en $[\underline{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$ dan geldt $\lambda_2 = \dfrac{\underline{x} \cdot \underline{b}_2}{\underline{b}_2 \cdot \underline{b}_2}$.

3. Gegeven zijn de afbeeldingen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Het voorschrift van afbeelding T is $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 - 2x_2 \end{bmatrix}$ en afbeelding S is de spiegeling in het vlak $Span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

z.o.z.

a. Toon aan dat T een lineaire afbeelding is.

b. Ga na of $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}(T)$ (de range/ beeldruimte van T).

c. Bepaal de standaardmatrix (representatiematrix) van afbeelding S (u mag ervan uitgaan dat S een lineaire afbeelding is).

4. Gegeven zijn de lineaire deelruimte $W = Span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en vector $\underline{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$. Ontbind $\underline{y}$ in een component $\underline{w} \in W$ en een component $\underline{u}$ die loodrecht staat op alle vectoren in W (dus $\underline{u} \in W^{\perp}$).

Normering:

Opg. 1a	3	Opg. 2a	2	Opg. 3a	2	Opg. 4	2
Opg. 1b	2	Opg. 2b	2	Opg. 3b	1.5		
Opg. 1c	2	Opg. 2c	2	Opg. 3c	2		
		Opg. 2d	2				