Uitwerking

Opg 1 a/
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & \alpha \\ 1 & 5 & -3 \\ 0 & -4 & 2\alpha \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & -6 & \alpha \\ 0 & -4 & 2\alpha \end{bmatrix} {\scriptstyle +2} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & \alpha-6 \\ 0 & -4 & 2\alpha \end{bmatrix} {\scriptstyle +1} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & \alpha-6 \\ 0 & 0 & 3\alpha-6 \end{bmatrix} = B$$

De pivotkolommen van A vormen een basis van $COL(A)$ en voor een basis van $ROW(A)$ kan men de pivotkolommen van B nemen, dus:

– als $\alpha = 2$ is $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$ een basis van $COL(A)$

en $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$ een basis van $ROW(A)$

– als $\alpha \neq 2$ is $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ -3 \\ 2\alpha \end{bmatrix} \right\}$ een

basis van $COL(A)$ en $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ \alpha-6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\alpha-6 \end{bmatrix} \right\}$

een basis van $ROW(A)$.

b/ Los op $A\underline{x} = \underline{0}$, dus beschouw $\left[A \mid \underline{0} \right]$

Uit het vorige onderdeel volgt dat deze aangevulde matrix kan worden geveegd

tot $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (\times \tfrac{1}{4}) \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] {\scriptstyle -5}$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 \text{ is vrij} \end{cases}$$

$\Rightarrow NUL(A) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is

een basis van $NUL(A)$

c/ Methode 1: $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\5\\-4\end{bmatrix}\right\}$,

dus $\underline{x} \in (\mathrm{Col}(A))^{\perp} \Leftrightarrow \underline{x}\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix} = 0$ en $\underline{x}\cdot\begin{bmatrix}-6\\5\\-4\end{bmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ 4x_3 = -6x_1 + 5x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ 4x_3 = -6x_1 + 10x_1 = 4x_1 \end{cases} \Leftrightarrow x_3 = x_1$$

$$\Leftrightarrow \underline{x} = x_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \text{ met } x_1 \in \mathbb{R}.$$

Hieruit volgt:

$(\mathrm{Col}(A))^{\perp} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$ en $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$ is een basis van $(\mathrm{Col}(A))^{\perp}$

Methode 2: $(\mathrm{Col}(A))^{\perp} = \mathrm{Nul}(A^T)$, dus los op $A^T\underline{x} = \underline{0}$. We beschouwen daarom:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} -3 \;\; +1 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} +1 \;\; -\tfrac{1}{2} \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \\ x_3 \text{ is vrij} \end{cases} \Rightarrow \underline{x} = x_3\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

met $x_3 \in \mathbb{R}$

Hieruit volgt:

$(\mathrm{Col}(A))^{\perp} = \mathrm{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$ en $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$ is een basis van $(\mathrm{Col}(A))^{\perp}$

Opg.2 a/ Onwaar, immers $(\underline{v}_1+\underline{v}_2)+(\underline{v}_3+\underline{v}_4)=(\underline{v}_2+\underline{v}_3)+(\underline{v}_4+\underline{v}_1)$

Dus $(\underline{v}_1+\underline{v}_2)-(\underline{v}_2+\underline{v}_3)+(\underline{v}_3+\underline{v}_4)-(\underline{v}_4+\underline{v}_1)=\underline{0}$ ⊠

b/ Onwaar, immers I_n-B heeft inverse I_n+B

$\Leftrightarrow (I_n-B)(I_n+B)=I_n$ en $(I_n+B)(I_n-B)=I_n$

$\Leftrightarrow I_n^2-B^2=I_n \Leftrightarrow I_n-B^2=I_n \Leftrightarrow$

$B^2=O_{n,n}$. Dit hoeft echter niet te betekenen dat $B=O_{n,n}$. Bijv. $B=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$ geeft een tegenvoorbeeld. Dan $I_2-B=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}$ en $I_2+B=\begin{bmatrix}2&1\\-1&0\end{bmatrix}$. Nu geldt I_2+B is de inverse van I_2-B maar $B\neq O_{2,2}$ ⊠

c Onwaar, want $\text{Rang}(C^T)=\dim(\text{COL}(C^T))$ $=\dim(\text{ROW}(C))=3$ (want C heeft 3 pivot-posities). Uit het Rangtheorema (toegepast op C^T) volgt nu:

$\dim(\text{NUL}(C^T))+\text{Rang}(C^T)=7$. Omdat $\text{Rang}(C^T)=3$ betekent dit dat $\dim(\text{NUL}(C^T))=4$.

Een tegenvoorbeeld geeft bijv.

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

d Waar, immers $[\underline{x}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix}$ dus

$\underline{x}=\lambda_1\underline{b}_1+\lambda_2\underline{b}_2+\lambda_3\underline{b}_3$. Hieruit volgt:

$\underline{x}\cdot\underline{b}_2=(\lambda_1\underline{b}_1+\lambda_2\underline{b}_2+\lambda_3\underline{b}_3)\cdot\underline{b}_2 \Rightarrow$

$\underline{x}\cdot\underline{b}_2=(\lambda_1\underline{b}_1)\cdot\underline{b}_2+(\lambda_2\underline{b}_2)\cdot\underline{b}_2+(\lambda_3\underline{b}_3)\cdot\underline{b}_2 \Rightarrow$

$\underline{x}\cdot\underline{b}_2=\lambda_1(\underline{b}_1\cdot\underline{b}_2)+\lambda_2(\underline{b}_2\cdot\underline{b}_2)+\lambda_3(\underline{b}_3\cdot\underline{b}_2)\Rightarrow$

$\underline{x}\cdot\underline{b}_2=\lambda_2(\underline{b}_2\cdot\underline{b}_2)$, want $\mathcal{B}$ is orthogonaal

$\Rightarrow \lambda_2=\dfrac{\underline{x}\cdot\underline{b}_2}{\underline{b}_2\cdot\underline{b}_2}$ want $\underline{b}_2\neq\underline{0}$ ⊠

Opg. 3 a/ Bewijs 1:

- Zij $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$, dan geldt $T(\underline{x}+\underline{y}) = T\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} (x_1+y_1)-2(x_2+y_2) \\ -(x_1+y_1)+3(x_2+y_2) \\ 3(x_1+y_1)-2(x_2+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1-2x_2 \\ -x_1+3x_2 \\ 3x_1-2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1-2y_2 \\ -y_1+3y_2 \\ 3y_1-2y_2 \end{bmatrix}$$

$$= T(\underline{x}) + T(\underline{y})$$

- Zij $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan geldt $T(\alpha\underline{x}) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} (\alpha x_1)-2(\alpha x_2) \\ -(\alpha x_1)+3(\alpha x_2) \\ 3(\alpha x_1)-2(\alpha x_2) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1-2x_2 \\ -x_1+3x_2 \\ 3x_1-2x_2 \end{bmatrix} = \alpha T(\underline{x}) \qquad \boxtimes$$

Bewijs 2:

Voor elke $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ geldt $T(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_1-2x_2 \\ -x_1+3x_2 \\ 3x_1-2x_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}$. Dit betekent dat T een matrix-transformatie is en bijgevolg is T lineair $\boxtimes$

b/ Los op: $T(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$, dus beschouw:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 9 \end{array}\right] \begin{array}{c} +1 \\ -3 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{c} +2 \\ -4 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ Nu volgt $T\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$, dus

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}(T)$$

c/ De standaardmatrix van $S = \begin{bmatrix} S(\underline{e}_1) & S(\underline{e}_2) & S(\underline{e}_3) \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, want $S(\underline{e}_1) = \underline{e}_2$, $S(\underline{e}_2) = \underline{e}_1$ en $S(\underline{e}_3) = \underline{e}_3$

Opg. 4 Definieer $\underline{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{d}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ en $\underline{d}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Dan is $\{\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{d}_3\}$ een orthogonale basis van W en geldt:

$$\underline{w} = \text{proj}_W(\underline{y}) =$$

$$\left(\frac{\underline{y}\cdot\underline{d}_1}{\underline{d}_1\cdot\underline{d}_1}\right)\underline{d}_1 + \left(\frac{\underline{y}\cdot\underline{d}_2}{\underline{d}_2\cdot\underline{d}_2}\right)\underline{d}_2 + \left(\frac{\underline{y}\cdot\underline{d}_3}{\underline{d}_3\cdot\underline{d}_3}\right)\underline{d}_3 =$$

$$\frac{6}{3}\underline{d}_1 + \frac{10}{15}\underline{d}_2 + \left(\frac{-2}{3}\right)\underline{d}_3 =$$

$$2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{2}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dus:

$$\underline{w} = \text{proj}_W(\underline{y}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in W$$

en $\underline{u} = \underline{y} - \underline{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in W^{\perp}$