Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tentamen Lineaire Algebra, wi2273TA
Dinsdag 17 juni 2008, 14.00-17.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- De normering vindt u na de vragen.
- Elk antwoord dient duidelijk beargumenteerd te worden.
- Het getal (score+3)/3, op de gebruikelijke wijze afgerond, geeft het tentamencijfer.

---

1. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha-4 & 2 \\ -1 & 2 & \alpha+2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ en de vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ \beta \end{bmatrix}$

waarbij $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

a. Bepaal $\dim(NUL(A))$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$.

b. Neem $\alpha = 2$ en bepaal voor welke waarde(n) van β geldt dat $\underline{b} \in COL(A)$.

2. **Bewijs** of **weerleg** de volgende drie beweringen:

a. **Bewering 1:** Als A en B resp. een $m \times n$ – matrix en $n \times p$ – matrix zijn, waarbij de kolommen van B afhankelijk zijn, dan zijn ook de kolommen van AB afhankelijk.

b. **Bewering 2:** Als C een $n \times n$ – matrix is , waarbij n een oneven natuurlijk getal is, dan zijn $COL(C)$ en $NUL(C)$ verschillende lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^n$.

c. **Bewering 3:** Als A en B inverteerbare 3×3 – matrices zijn, waarbij $|A| = -9$ en $|B| = 3$, dan volgt $|2A^TB^{-1}| = -6$.

3. Los $n \times n$ – matrix X op uit de matrixvergelijking $A^T(I_n + X)B^{-1} = B^{-1} + A^T$, als A en B inverteerbare $n \times n$ – matrices zijn (uiteraard staat I_n voor de eenheidsmatrix met afmeting $n \times n$).

4. Gegeven zijn de matrix $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ en de vector $\underline{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$.

a. Bepaal de orthogonale projectie van $\underline{d}$ op $COL(C)$.

b. Bereken de kleinste-kwadraten-oplossing(en) van het lineaire stelsel $C\underline{x} = \underline{d}$.

5. Gegeven is de afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ met voorschrift $T(p(x)) = x(1-x)\,p'(x)$. Hierbij staat $p'(x)$ uiteraard voor de afgeleide van $p(x)$ naar x. Op $\mathbb{P}_2$ en $\mathbb{P}_3$ zijn resp. de bases $\mathcal{B} = \{1, 1+x, x+x^2\}$ en $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}$ gegeven.

a. Toon aan dat afbeelding T lineair is.

b. Bepaal de representatiematrix M van T t.o.v. de bases $\mathcal{B}$ en $\mathcal{C}$.

Vervolgens wordt op $\mathbb{P}_2$ het inprodukt met voorschrift $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$ gedefinieerd.

c. Construeer, uitgaande van $\{1, x, x^2\}$, m.b.v. het Gram-Schmidt-proces een **orthogonale** basis van $\mathbb{P}_2$.

d. Bereken de beste approximatie (benadering) van $q(x) = x^2$ in $\mathbb{P}_1$.

(**N.B.** $\mathbb{P}_n$ is de vectorruimte van alle reële polynomen van graad $\leq n$)

6. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ -2 & -\alpha & -1 \\ 4 & 2\alpha & 2 \end{bmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Bewijs of weerleg: Voor elke reële waarde van α heeft matrix A eigenwaarde 0.

b. Neem $\alpha = 2$ en ga na of matrix A diagonaliseerbaar is.

Voor de volgende twee onderdelen nemen we $\alpha = 0$.

c. Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $A = PDP^{-1}$.

d. We beschouwen tenslotte het volgende discrete dynamische systeem:

$$\begin{cases} \underline{x}_0 \text{ is een startvector uit } \mathbb{R}^3 \\ \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k \text{ voor } k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Geef aan hoe startvector $\underline{x}_0$ moet worden gekozen opdat het gegeven discrete dynamische systeem convergent is. Bepaal bovendien $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$ voor die situatie.

Normering:

Opg. 1a	2	Opg. 2a	$1\frac{1}{2}$	Opg. 3	$1\frac{1}{2}$	Opg. 4a	3	Opg. 5a	2	Opg. 6a	$1\frac{1}{2}$
Opg. 1b	$1\frac{1}{2}$	Opg. 2b	$1\frac{1}{2}$			Opg. 4b	$1\frac{1}{2}$	Opg. 5b	$1\frac{1}{2}$	Opg. 6b	$1\frac{1}{2}$
		Opg. 2c	1					Opg. 5c	2	Opg. 6c	2
								Opg. 5d	$1\frac{1}{2}$	Opg. 6d	$1\frac{1}{2}$