Opg. 1

Beschouw :
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha-4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \alpha+2 & 11 \\ 1 & -2 & -3 & \beta \end{array}\right] \begin{array}{c} +1 \quad -1 \end{array} \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha-4 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-2 & \alpha+4 & 12 \\ 0 & 2-\alpha & -5 & \beta-1 \end{array}\right] +1 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha-4 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha-2 & \alpha+4 & 12 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & \beta+11 \end{array}\right]$$

Hieruit volgt:

a/ Als $\alpha=2$ of $\alpha=1$ heeft $A\underline{x}=\underline{0}$ één vrije var.$^{\text{n}}$ en geldt $\dim(NUL(A))=1$

Als $\alpha\neq 2$ en $\alpha\neq 1$ heeft $A\underline{x}=\underline{0}$ geen vrije var. en geldt $\dim(NUL(A))=0$

b/ Als $\alpha=2$ kan $[A\,|\,\underline{b}]$ worden geveegd tot:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \beta+11 \end{array}\right] -\tfrac{1}{6} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \beta+9 \end{array}\right]$$

Nu kan men concluderen: $\underline{b}\in COL(A) \iff A\underline{x}=\underline{b}$ is oplosbaar $\iff \beta=-9$

Opg. 2 a/ Juist, immers B heeft afhankelijke kol.$^{\text{n}}$ dus er bestaat een vector $\underline{c}\in\mathbb{R}^p$ met $\underline{c}\neq\underline{0}$ zodat $B\underline{c}=\underline{0}$. Hieruit volgt dat $AB\underline{c}=\underline{0}$, dus deze vector $\underline{c}$ (ongelijk aan $\underline{0}$) is oplossing van $AB\underline{x}=\underline{0}$, hetgeen betekent dat AB afhankelijke kolommen heeft. $\boxtimes$

b/ Juist, want stel dat $COL(C)=NUL(C)$. Dan geldt $\dim(NUL(C))=\dim(COL(C))=\text{rang}(C)$ en volgt met het rangtheorema dat $n=2\,\text{rang}(C)$. Dit is in tegenspraak met het gegeven dat n oneven is. Dit betekent dat $COL(C)$ en $NUL(C)$ verschillende lineaire deelruimten van $\mathbb{R}^n$ zijn. $\boxtimes$

c/ Onjuist, immers $\left|2A^TB^{-1}\right| = 2^3\left|A^TB^{-1}\right|$
$= 2^3|A^T|\,|B^{-1}| = 8\cdot|A|\cdot\frac{1}{|B|} = -24$ $\boxtimes$

Opg. 3

$$A^T(I_n+X)B^{-1} = B^{-1}+A^T$$
$$\Longleftrightarrow \quad I_n+X = (A^T)^{-1}\left(B^{-1}+A^T\right)B$$
$$\Longleftrightarrow \quad X = (A^T)^{-1}+B-I_n$$

Opg. 4 a. Veeg eerst C naar echelonvorm:

$$C=\begin{bmatrix}1&-2&3&-1\\1&-1&1&0\\1&1&1&2\\1&2&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{-1,\,-1,\,-1}$$

$$\begin{bmatrix}1&-2&3&-1\\0&1&-2&1\\0&3&-2&3\\0&4&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow{-3,\,-4}\begin{bmatrix}1&-2&3&-1\\0&1&-2&1\\0&0&4&0\\0&0&8&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-2}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-2&3&-1\\0&1&-2&1\\0&0&4&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Hieruit volgt dat $\{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$, dit zijn de eerste 3 kol$^{\underline{n}}$ van C, een basis is van Col(C). (de pivotkol$^{\underline{n}}$)

Construeer vervolgens, m.b.v. het G.S.-proces, een orthogonale basis $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ in Col(C).

$$\underline{b}_1 = \underline{c}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_2 = \underline{c}_2 - \left(\frac{\underline{c}_2\cdot\underline{b}_1}{\underline{b}_1\cdot\underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 = \underline{c}_2 - \frac{0}{4}\,\underline{b}_1 = \begin{bmatrix}-2\\-1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_3 = \underline{c}_3 - \left(\frac{\underline{c}_3\cdot\underline{b}_1}{\underline{b}_1\cdot\underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 - \left(\frac{\underline{c}_3\cdot\underline{b}_2}{\underline{b}_2\cdot\underline{b}_2}\right)\underline{b}_2$$

$$= \underline{c}_3 - \frac{8}{4}\underline{b}_1 - \frac{0}{10}\underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bereken tenslotte de orthog. proj. van $\underline{d}$ op $COL(C)$:

$$\text{proj}_{COL(C)}(\underline{d}) = \left(\frac{\underline{d}\cdot\underline{b}_1}{\underline{b}_1\cdot\underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 + \left(\frac{\underline{d}\cdot\underline{b}_2}{\underline{b}_2\cdot\underline{b}_2}\right)\underline{b}_2 + \left(\frac{\underline{d}\cdot\underline{b}_3}{\underline{b}_3\cdot\underline{b}_3}\right)\underline{b}_3$$

$$= \frac{12}{4}\underline{b}_1 + \frac{10}{10}\underline{b}_2 + \frac{0}{4}\underline{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b. Beschouw: $\left[\, C \;\middle|\; \text{proj}_{COL(C)}(\underline{d}) \,\right] =$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 5 \end{array}\right] \begin{matrix} -1 & -1 & -1 \end{matrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \begin{matrix} +2 & -3 & -4 \end{matrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} +\frac{1}{4} & +\frac{1}{2} & -2 \end{matrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - x_4 \\ x_2 = 1 - x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 \text{ is vrij} \end{cases}$$

De kleinste-kwadraten-opl$^{\underline{n}}$ zijn dus:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

met $x_4 \in \mathbb{R}$

Opg. 5 a (*) Zij $p(x), q(x) \in \mathbb{P}_2$ dan geldt:

$$T(p(x) + q(x)) = x(1-x)(p(x) + q(x))'$$
$$= x(1-x)(p'(x) + q'(x))$$
$$= x(1-x)p'(x) + x(1-x)q'(x) = T(p(x)) + T(q(x))$$

(*) Zij $p(x) \in \mathbb{P}_2$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ dan geldt:

$$T(\alpha p(x)) = x(1-x)(\alpha p(x))' = x(1-x)\alpha p'(x)$$
$$= \alpha x(1-x)p'(x) = \alpha T(p(x)) \quad \boxtimes$$

b/ $T(1) = 0 \implies [T(1)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(1+x) = x(1-x) = x - x^2 = (1+x) - (1+x^2)$

$\implies [T(1+x)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T(x+x^2) = x(1-x)(1+2x) = x + 2x^2 - x^2 - 2x^3$

$= x + x^2 - 2x^3 = (1+x) + (1+x^2) - 2(1+x^3)$

$\implies [T(x+x^2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ Dus $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

c/ Pas het G.S.-proces toe op $\{1, x, x^2\}$, dat geeft:

$q_1(x) = 1$

$q_2(x) = x - \dfrac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 = x - \dfrac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 1\,dx} \cdot 1$

$= x - 1/2$

$q_3(x) = x^2 - \dfrac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 - \dfrac{\langle x^2, x - \frac{1}{2}\rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\rangle}(x - \tfrac{1}{2})$

$= x^2 - \dfrac{\int_0^1 x^2\,dx}{\int_0^1 1\,dx} 1 - \dfrac{\int_0^1 x^3 - \frac{1}{2}x^2\,dx}{\int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4}\,dx}(x - \tfrac{1}{2})$

$= x^2 - \frac{1}{3} - \dfrac{(\frac{1}{4} - 1/6)}{(1/3 - 1/2 + 1/4)}(x - 1/2) = x^2 - \frac{1}{3} - \dfrac{1/12}{1/12}(x - \tfrac{1}{2})$

$= x^2 - \frac{1}{3} - x + \frac{1}{2} = x^2 - x + \frac{1}{6}$

d/ De beste approximatie van $g(x) = x^2$ in $\mathbb{P}_1$ is $\mathrm{proj}_{\mathbb{P}_1}(x^2)$.

Uit onderdeel c/ volgt:

$\mathrm{proj}_{\mathbb{P}_1}(x^2) = x^2 - q_3(x) = x^2 - (x^2 - x + \frac{1}{6})$

$= x - 1/6$

Opg. 6 a/ Juist, immers $P_A(0) = |A - 0 I_3|$

$$= |A| = \begin{vmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ -2 & -\alpha & -1 \\ 4 & 2\alpha & 2 \end{vmatrix} \overset{+1}{\downarrow} = \begin{vmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2\alpha & 2 \end{vmatrix}$$

$= 0$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ (ontwikkel naar rij 2) $\boxtimes$

b/ $\alpha = 2$, dus $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ -2 & -2-\lambda & -1 \\ 4 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{+1}{\downarrow}$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ -\lambda & -\lambda & 0 \\ 4 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[-1]{} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \lambda & 1 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-\lambda)(-1)^3 \lambda (2-\lambda) = \lambda^2 (2-\lambda)$$

(ontwikkel naar rij 2)

Hieruit volgt dat 2 een enkelvoudige eigenwaarde is, die een ééndimensionale eigenruimte E_2 levert, en 0 een dubbele eigenwaarde. Op de voorhand zijn er 2 mogelijkheden voor E_0, of $\dim(E_0) = 1$ of $\dim(E_0) = 2$ (dat bepaalt ook het verschil tussen het wel of niet diagonaliseerbaar zijn v/d matrix). We beschouwen derhalve:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{+1}{\downarrow} \overset{-2}{\downarrow} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Nu zien we dat het lineaire stelsel $A\underline{x} = \underline{0}$ 2 vrije var^n heeft, dus dat $\dim(E_0) = 2$, hetgeen betekent dat A diag. is als $\alpha = 2$.

c/ $\alpha = 0$ dus $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ en

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} (-1)^4$$

$$= (-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 4\right)$$

Dus $P_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$ of $(2-\lambda)^2 = 4$

$\iff \lambda = 0$ of $2-\lambda = 2$ of $2-\lambda = -2$

$\iff \lambda = 0$ (alg. mult $= 2$) of $\lambda = 4$ (alg mult $= 1$)

Bepaling v/d eigenruimten:

Als $\lambda = 0$ beschouwen we:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow E_0 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Als $\lambda = 4$ beschouwen we:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow E_4 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Dus men kan bijv. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ en

$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ kiezen.

d/ Het D.D.S. is convergent precies dan als startvector $\underline{x}_0$ geen component heeft langs eigenruimte E_4. Dat betekent dat

$\underline{x}_0 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ voor zekere $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Dan geldt: $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \lim_{k\to\infty} \left(c_1 0^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 0^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \underline{0}$