Uitwerking

Opg. 1 Beschouw $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 8 \\ 2 & 2 & \alpha & -4 \\ 10 & 4 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} -1 \ -5 \end{array}$ $\rightarrow$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & \alpha+1 & -12 \\ 0 & 9 & \alpha^2+5 & \alpha^2-40 \end{array}\right]$ -3 $\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & \alpha+1 & -12 \\ 0 & 0 & \underbrace{\alpha^2-3\alpha+2}_{(\alpha-2)(\alpha-1)} & \underbrace{\alpha^2-4}_{(\alpha+2)(\alpha-2)} \end{array}\right]$

a. Het stelsel is strijdig $\Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha-1)=0$ en $(\alpha+2)(\alpha-2) \neq 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 1$

b. Uit het voorgaande volgt dat C kan worden geveegd tot $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & (\alpha-2)(\alpha-1) \end{bmatrix}$

* Als $\alpha \neq 2$ en $\alpha \neq 1$, dan $NUL(C) = \{\underline{0}\}$ en een basis van $NUL(C)$ is leeg.
* Als $\alpha = 2$ dan is C rij-equivalent met

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dus $NUL(C) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

en $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis van $NUL(C)$

* Als $\alpha = 1$ dan is C rij-equivalent met

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, dus $NUL(C) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}$

en $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis van $NUL(C)$.

c C^TC is inverteerbaar $\Leftrightarrow$
de kolommen van C zijn onafhankelijk $\Leftrightarrow$
C heeft 3 pivotposities $\Leftrightarrow$
$\alpha \neq 2$ en $\alpha \neq 1$

opg. 2 a Los op: $\lambda_1(\underline{a}_1+\underline{a}_2+\underline{a}_3)+\lambda_2(\underline{a}_1-\underline{a}_2+2\underline{a}_3)+\lambda_3(\underline{a}_1+\alpha\underline{a}_3) = \underline{0}$

$\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\underline{a}_1+(\lambda_1-\lambda_2)\underline{a}_2+(\lambda_1+2\lambda_2+\alpha\lambda_3)\underline{a}_3=\underline{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1-\lambda_2 \qquad\; =0 \\ \lambda_1+2\lambda_2+\alpha\lambda_3=0 \end{cases} \quad \text{want } \{\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3\} \text{ is onafh.}$$

Beschouw derhalve:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} -1 \;\; -1 \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & 0 \end{array}\right] \updownarrow \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} +2 \\ \downarrow \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha-3 & 0 \end{array}\right]$$

Nu volgt: Er is een niet-triviale oplossing $\Leftrightarrow$
het gegeven stelsel vectoren is afh. $\Leftrightarrow$
$2\alpha-3=0 \Leftrightarrow \alpha = 1\frac{1}{2}$

b $W = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\5\\-4\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\-8\\7\\1\end{bmatrix}\right\}$, daar

$\begin{bmatrix}5\\-8\\7\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\3\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-2\\5\\-4\\1\end{bmatrix}$ en $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\5\\-4\\1\end{bmatrix}\right\}$ onafh. is,

is $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\5\\-4\\1\end{bmatrix}\right\}$ een basis van W.

c $\text{Rang}(A^T) = \dim(\text{COL}(A^T)) = \dim(\text{ROW}(A)) = 2$

M.b.v. het Rangtheorema volgt nu:

$\dim(\text{NUL}(A^T)) = 3 - \text{Rang}(A^T) = 3 - 2 = 1$

d Zij $\underline{w} \in H$, dan kan men schrijven:

$\underline{w} = \lambda_1 \underline{w}_1 + \lambda_2 \underline{w}_2 + \dots + \lambda_p \underline{w}_p$ voor zekere $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ en geldt:

$\underline{x} \bullet \underline{w} = \underline{x} \bullet (\lambda_1 \underline{w}_1 + \lambda_2 \underline{w}_2 + \dots + \lambda_p \underline{w}_p) =$

$\underline{x} \bullet (\lambda_1 \underline{w}_1) + \underline{x} \bullet (\lambda_2 \underline{w}_2) + \dots + \underline{x} \bullet (\lambda_p \underline{w}_p) =$

$\lambda_1 (\underline{x} \bullet \underline{w}_1) + \lambda_2 (\underline{x} \bullet \underline{w}_2) + \dots + \lambda_p (\underline{x} \bullet \underline{w}_p) =$

$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_p \cdot 0 = 0$

Hieruit volgt: $\underline{x} \perp \underline{w}$ $\boxtimes$

q.3 a $\text{NUL}(T_1)$

Los op $T_1(\underline{x}) = \underline{0}$, dus beschouw $\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ en x_2 is vrij

$\Rightarrow \text{NUL}(T_1) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis van $\text{NUL}(T_1)$

$R(T_1)$

Beschouw: $T_1(\underline{x}) = x_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ voor willekeurige $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$

Hieruit volgt: $R(T_1) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right\}$

$= \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right\}$ en $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis van $R(T_1)$

Meetkundig gezien is T_1 de orthogonale projectie op $\text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

b. De standaardmatrix van T_2 is $\begin{bmatrix} T_2(\underline{e}_1) & T_2(\underline{e}_2) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ want :}$$

$$\underline{e}_1 \xrightarrow{S} -\underline{e}_1 \xrightarrow{R} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\underline{e}_2 \xrightarrow{S} \underline{e}_2 \xrightarrow{R} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

opg. 4 a. Definieer : $\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \left(\frac{-18}{12}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + 1\tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Neem $\underline{b}_2 = 2\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\underline{n}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \left(\frac{2}{12}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{10}{12}\right) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{5}{6} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Neem $\underline{b}_3 = -3\underline{n}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Dus $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is een orthogonale basis van W.

b $\underline{w} = \left(\frac{\underline{b}\cdot\underline{b}_1}{\underline{b}_1\cdot\underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 + \left(\frac{\underline{b}\cdot\underline{b}_2}{\underline{b}_2\cdot\underline{b}_2}\right)\underline{b}_2 + \left(\frac{\underline{b}\cdot\underline{b}_3}{\underline{b}_3\cdot\underline{b}_3}\right)\underline{b}_3$

$$= \frac{4}{12}\begin{bmatrix}-1\\3\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{4}{12}\begin{bmatrix}3\\1\\1\\-1\end{bmatrix} + \frac{0}{12}\begin{bmatrix}1\\1\\-3\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\4\\2\\0\end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \underline{b} - \underline{w} = \begin{bmatrix}1/3\\-1/3\\1/3\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\3\end{bmatrix}$$

opg. 5 Substitutie van de punten geeft:

$$\begin{cases}\beta_0 + \beta_1 = 6\\ \beta_0 + 2\beta_1 = 3\\ \beta_0 + 4\beta_1 = 0\end{cases}$$

In matrixnotatie: $A\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\end{bmatrix} = \underline{b}$ waarbij $A = \begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&4\end{bmatrix}$ en $\underline{b} = \begin{bmatrix}6\\3\\0\end{bmatrix}$

Los vervolgens op: $A^TA\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\end{bmatrix} = A^T\underline{b} \iff$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\3\\0\end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix}3&7\\7&21\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9\\12\end{bmatrix} \Rightarrow \beta_0 = 7\tfrac{1}{2} \text{ en } \beta_1 = -\frac{27}{14}$$

De gezochte functie is dus $y = 7\tfrac{1}{2} - \frac{27}{14}2^x$