Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4, 2628CD Delft

Tussentoets Lineaire Algebra, wi2273TA
Dinsdag 31 oktober 2006, 14.00-16.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk onderdeel is (bij correcte beantwoording) 3 punten waard.
- Het getal (score+3)/3, afgerond op 1 decimaal, geeft het eindresultaat.

---

1. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & -10 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & \alpha \\ 2 & -2 & -14 & 0 \end{bmatrix}$ met $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. **Bewijs of weerleg:** Voor geen enkele waarde van α geldt $COL(A) = \mathbb{R}^4$.

b. Neem $\alpha = -3$ en bepaal een basis van $NUL(A)$.

c. We definiëren vervolgens $H = Span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ en

$\underline{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ontbind $\underline{x}$ in een component $\underline{v} \in H$ en een component $\underline{w} \in H^{\perp}$.

2. Bewijs of weerleg de volgende 4 beweringen:

a. Als $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$ een basis is van $\mathbb{R}^4$, dan is stelsel $\{\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{a}_2 + \underline{a}_3, \underline{a}_3 + \underline{a}_4, \underline{a}_4 + \underline{a}_1\}$ lineair onafhankelijk.

b. Als $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^4$, dan is $Span\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ een 3-dimensionale lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$.

c. Als $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ een onafhankelijk stelsel vectoren is in $\mathbb{R}^4$ en B is de 4×4 – matrix met resp. de kolommen $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ en $2\underline{b}_1 - 6\underline{b}_2 + 5\underline{b}_3$, dan geldt $\dim(NUL(B)) = 3$.

d. Als $\underline{x}, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^4$ en $\underline{x} \perp \underline{a}$, $\underline{x} \perp \underline{b}$ en $\underline{x} \perp \underline{c}$, dan geldt $\underline{x} \perp \underline{v}$ voor **elke** vector $\underline{v} \in Span\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$.

Z.O.Z.

3. Gegeven is de afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die een vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ eerst spiegelt in de lijn $x_2 = x_1$ en vervolgens (de gespiegelde $\underline{x}$) roteert om $[0,0]$ over $\frac{\pi}{2}$ radialen tegen de wijzers van de klok en de **lineaire** afbeeldingen $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Lineaire afbeelding S is de rotatie om [0,0] over $\frac{3}{4}\pi$ met standaardmatrix $\begin{bmatrix} \cos(\frac{3}{4}\pi) & -\sin(\frac{3}{4}\pi) \\ \sin(\frac{3}{4}\pi) & \cos(\frac{3}{4}\pi) \end{bmatrix}$ en P is de orthogonale projectie op $Span\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$.

a. Bepaal het voorschrift van T (zonder te gebruiken dat T lineair is) en toon aan dat T een lineaire afbeelding is.

b. Bepaal een basis in $NUL(SP)$ en in $\mathcal{R}(SP)$. Met SP wordt uiteraard bedoeld de samenstelling waarbij eerst P wordt toegepast op een vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ en vervolgens S wordt toegepast op $P(\underline{x})$.