Uitwerking:

Opg. 1 a/ Beschouw: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & -10 & 1 \\ 0 & 3 & 9 & \alpha \\ 2 & -2 & -14 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & \alpha \\ 0 & -2 & -6 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Omdat A maximaal 3 pivotposities heeft (kolom 3 heeft immers geen pivotpositie) is de dimensie van $\mathrm{COL}(A)$ maximaal 3. Dus voor geen enkele waarde van α is $\mathrm{Col}(A)$ gelijk aan $\mathbb{R}^4$!

De bewering is dus <u>waar</u>.

b/ Uit a/ volgt dat $[A \mid \underline{0}]$ kan worden geveegd tot (Rij 2 wordt meteen geschaald met $-\frac{1}{2}$):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{als } \alpha = -3.$$

Oplossen van $A\underline{x} = \underline{0}$ levert dus:

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3 + x_4 \\ x_2 = -3x_3 + x_4 \\ x_3 \text{ is vrij} \\ x_4 \text{ is vrij} \end{cases} \Rightarrow \underline{x} = x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

met $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$

Dus $\mathrm{NUL}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en daar

$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ onafhankelijk is, is dit een basis van $\mathrm{NUL}(A)$

c) Omdat $\left\{ \underset{\underset{b_1}{\|}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}, \underset{\underset{b_2}{\|}}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{\underset{b_3}{\|}}{\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}} \right\}$ een orthogonale basis

is van H, kunnen $\underline{v}$ als volgt vinden:

$$\underline{v} = \left(\frac{\underline{x} \cdot \underline{b}_1}{\underline{b}_1 \cdot \underline{b}_1}\right)\underline{b}_1 + \left(\frac{\underline{x} \cdot \underline{b}_2}{\underline{b}_2 \cdot \underline{b}_2}\right)\underline{b}_2 + \left(\frac{\underline{x} \cdot \underline{b}_3}{\underline{b}_3 \cdot \underline{b}_3}\right)\underline{b}_3$$

$$= \frac{12}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \underline{b}_2 + \left(\frac{-22}{22}\right)\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

en $\underline{w} = \underline{x} - \underline{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

Opg. 2 a) Onwaar, immers

$$(\underline{a}_1 + \underline{a}_2) - (\underline{a}_2 + \underline{a}_3) + (\underline{a}_3 + \underline{a}_4) - (\underline{a}_4 + \underline{a}_1) = \underline{0}$$

b) Onwaar, want $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ kan afhankelijk zijn. Neem bijv. $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

dan is $\text{Span}\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ 2-dimensionaal.

c) $B = \left[\underline{b}_1 \;\; \underline{b}_2 \;\; \underline{b}_3 \;\; 2\underline{b}_1 - 6\underline{b}_2 + 5\underline{b}_3\right]$ en omdat $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ onafhankelijk is heeft B 3 pivotkolommen. Dus geldt: $\text{Rang}(B) = \dim(\text{Col}(B)) = 3$. Uit het rangtheorema volgt nu $\dim(\text{Nul}(B)) = 1$

De bewering is dus onwaar.

d <u>Waar</u>, immers zij $\underline{v} \in \text{Span}\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ dan kan men schrijven $\underline{v} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c}$ voor zekere $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$.

Nu volgt: $\underline{x} \cdot \underline{v} = \underline{x} \cdot (\lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c}) =$
$\lambda_1 (\underline{x} \cdot \underline{a}) + \lambda_2 (\underline{x} \cdot \underline{b}) + \lambda_3 (\underline{x} \cdot \underline{c}) = 0 + 0 + 0 = 0$

Dus $\underline{x} \perp \underline{v}$ $\boxtimes$

<u>Opg. 3</u> a Zij $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, dan volgt:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{in } x_2 = x_1]{\text{spiegelen}} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \xrightarrow[{[0,0]} \text{ over } \pi/2]{\text{roteren om}} \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Het voorschrift van T is dus $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ voor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

(<u>N.B.</u> T is de spiegeling in de x_2-as)

Zij vervolgens $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$ en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan geldt:

*) $T(\underline{x} + \underline{y}) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -(x_1 + y_1) \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} =$
$\begin{bmatrix} -x_1 - y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = T(\underline{x}) + T(\underline{y})$

*) $T(\alpha \underline{x}) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -(\alpha x_1) \\ \alpha x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}$
$= \alpha \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha T(\underline{x})$

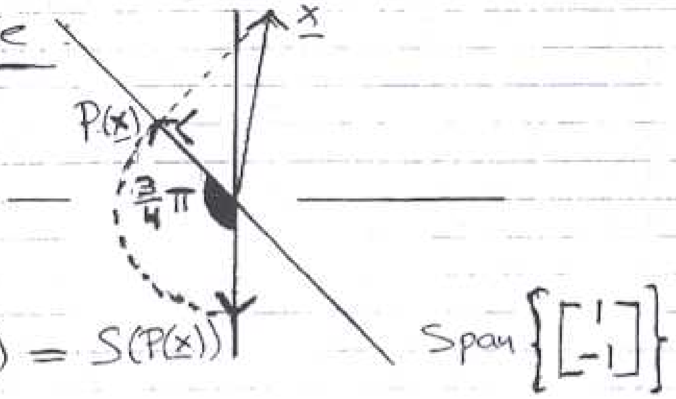
Hieruit volgt dat afbeelding T lineair is.

<u>N.B.</u> Men kan ook als volgt redeneren:
Voor elke $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ geldt: $T(\underline{x}) =$
$\begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$. Hieruit volgt dat T een matrixtransformatie is, en bijgevolg is T lineair.

$\boxtimes$

b/ */ De samenstelling SP projecteert een vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ eerst op de deellijn $x_2 = -x_1$ en roteert vervolgens de projectie $P(\underline{x})$ over $\frac{3}{4}\pi$ radialen om $[0,0]$ tegen de wijzers v/d klok.

Plaatje



*/ Hieruit volgt:
$NUL(SP) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ en $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis in $NUL(SP)$

$\mathcal{R}(SP) = \text{Span}\{\underline{e}_2\}$ en $\{\underline{e}_2\}$ is een basis in $\mathcal{R}(SP)$

N.B. De standaardmatrix van SP is

$$\begin{bmatrix} \cos(\frac{3}{4}\pi) & -\sin(\frac{3}{4}\pi) \\ \sin(\frac{3}{4}\pi) & \cos(\frac{3}{4}\pi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Ook hieruit volgen de eerder gevonden resultaten