Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4; 2628CD Delft

Tussentoets Lineaire Algebra, wi2273TA
Donderdag 4 november 2004, 14.00-16.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Elk onderdeel is (bij correcte beantwoording) 3 punten waard.
- Het getal (score+4)/4, afgerond op 1 decimaal, geeft het eindresultaat.

---

1. In $\mathbb{R}^3$ zijn gegeven matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ met $\alpha \in \mathbb{R}$ en vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$ met $\beta \in \mathbb{R}$.

- **a.** Voor welke waarden van α en β is het lineaire stelsel vergelijkingen $A\underline{x} = \underline{b}$ strijdig?
- **b.** Bepaal voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ de rang van A en de dimensie van $NUL(A)$.

Voor de volgende drie onderdelen nemen we $\alpha = -1$ en $\beta = 1$.

- **c.** Bepaal de vectoren $\underline{c} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor het lineaire stelsel vergelijkingen $A\underline{x} = \underline{c}$ oplosbaar is.
- **d.** Bereken een orthogonale basis in $COL(A)$.
- **e.** Bereken de orthogonale projectie van $\underline{b}$ op $COL(A)$.

2. Bewijs of weerleg de volgende vier beweringen:

- **a.** Als $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ een lineair onafhankelijk stelsel vectoren is in $\mathbb{R}^5$, dan is ook $\{\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + \underline{v}_3, \underline{v}_3 + \underline{v}_4, \underline{v}_4 + \underline{v}_1\}$ lineair onafhankelijk.
- **b.** Als A een $m \times n$ – matrix is, B een $n \times p$ – matrix en $\underline{x} \in NUL(B)$ dan geldt ook $\underline{x} \in NUL(AB)$.
- **c.** Als A een $n \times n$ – matrix is met $A^2 = O_{n,n}$ (de nulmatrix met afmeting $n \times n$) dan volgt dat $A = O_{n,n}$.
- **d.** Als $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^4$, dan geldt $\|\underline{u} - \underline{v}\|^2 + \|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = 2\,\|\underline{u}\|^2 + 2\,\|\underline{v}\|^2$.

3. Gegeven zijn de afbeeldingen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Hierbij is T de afbeelding die een vector uit $\mathbb{R}^2$ **eerst** spiegelt in de x_2 – as en **vervolgens** (het spiegelbeeld) roteert om $[0,0]$ over $\frac{\pi}{4}$ radialen tegen de klok in. Afbeelding S heeft het voorschrift

$$S(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -3x_1 + 5x_2 \\ 6x_1 - 10x_2 \end{bmatrix}.$$

- **a.** Toon aan dat afbeelding S lineair is.
- **b.** Bepaal een basis in $NUL(S)$ (de nulruimte van S) en in $R(S)$ (de beeldruimte /range van S).
- **c.** Bepaal de standaardmatrix (representatiematrix) en het voorschrift van afbeelding T (ook afbeelding T is lineair, dat hoeft u niet aan te tonen).