Uitwerking.

1. a) Beschouw: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha & \beta \end{array}\right] \begin{matrix} -2 & -1 \end{matrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha-1 & \beta-1 \end{array}\right] +1$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & \beta-2 \end{array}\right]$ Hieruit volgt: $A\underline{x} = \underline{b}$ is strijdig $\iff \alpha = -1$ en $\beta \neq 2$

b) Aan het veegproces uit onderdeel a) kan men zien:
(*) matrix A heeft 2 pivotposities als $\alpha = -1$
(*) matrix A heeft 3 pivotposities als $\alpha \neq -1$
Dus $\text{Rang}(A) = 3$ als $\alpha \neq -1$ en $\text{Rang}(A) = 2$ als $\alpha = -1$
M.b.v. het rangtheorema volgt dan dat $\dim(\text{NUL}(A)) = 0$ als $\alpha \neq -1$ en $\dim(\text{NUL}(A)) = 1$ als $\alpha = -1$.

c) Beschouw: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & c_1 \\ 2 & -3 & 4 & c_2 \\ 1 & 0 & -1 & c_3 \end{array}\right] \begin{matrix} -2 & -1 \end{matrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & c_1 \\ 0 & -1 & 2 & c_2 - 2c_1 \\ 0 & 1 & -2 & c_3 - c_1 \end{array}\right] +1$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & c_1 \\ 0 & -1 & 2 & c_2 - 2c_1 \\ 0 & 0 & 0 & -3c_1 + c_2 + c_3 \end{array}\right]$

Nu volgt $A\underline{x} = \underline{c}$ is oplosbaar $\iff -3c_1 + c_2 + c_3 = 0$
$\iff \underline{c} \in \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \iff \underline{c} \in \text{COL}(A)$

d) Een basis in $\text{COL}(A)$ is $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

Een orthogonale basis $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$ wordt gegeven door:

$$\underline{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(\frac{-7}{6}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 + 7/6 \\ -3 + 14/6 \\ 7/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -4/6 \\ 7/6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Dus bijv. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}\right\}$ is een orthog. basis in $\text{COL}(A)$

e) De orthogonale proj van $\underline{b}$ op COL(A) is

$$\left(\frac{\underline{b}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}}\right)\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\left(\frac{\underline{b}\cdot\begin{bmatrix}1\\-4\\7\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1\\-4\\7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-4\\7\end{bmatrix}}\right)\begin{bmatrix}1\\-4\\7\end{bmatrix}$$

$$=\frac{4}{6}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+\frac{4}{66}\begin{bmatrix}1\\-4\\7\end{bmatrix}=\frac{1}{33}\left(22\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1\\-4\\7\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{33}\begin{bmatrix}24\\36\\36\end{bmatrix}=\frac{4}{11}\begin{bmatrix}2\\3\\3\end{bmatrix}$$

pg. 2

a) Los op $\lambda_1(\underline{v}_1+\underline{v}_2)+\lambda_2(\underline{v}_1+\underline{v}_3)+\lambda_3(\underline{v}_3+\underline{v}_4)+\lambda_4(\underline{v}_4+\underline{v}_1)=\underline{0}$

$$\Longrightarrow(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4)\underline{v}_1+\lambda_1\underline{v}_2+(\lambda_2+\lambda_3)\underline{v}_3+(\lambda_3+\lambda_4)\underline{v}_4=\underline{0}$$

Omdat $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3,\underline{v}_4\}$ Lin. onafh. is, volgt hieruit

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4=0\\ \lambda_1=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_3+\lambda_4=0\end{cases}$$

$\lambda_2+\lambda_3=0$, $\lambda_3+\lambda_4=0$ $\longrightarrow$ $\lambda_2=\lambda_4$

$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_4$ $\Longrightarrow$ $\lambda_2=\lambda_4=0$ $\longrightarrow$ $\lambda_3=0$

Dus $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$ en bijgevolg is het gegeven stelsel vectoren Lin. onafh.
De bewering is dus JUIST.

b) Juist, immers als $\underline{x}\in NUL(B)$ dan volgt:
$(AB)\underline{x}=A(B\underline{x})=A\underline{0}=\underline{0}$. Dus geldt ook $\underline{x}\in NUL(AB)$

c) Onjuist, neem bijv $A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$. Dan geldt

$A^2=O_{2,2}$, maar $A\neq O_{2,2}$

d) Juist, immers $\|\underline{u}-\underline{v}\|^2+\|\underline{u}+\underline{v}\|^2=(\underline{u}-\underline{v})\cdot(\underline{u}-\underline{v})+(\underline{u}+\underline{v})\cdot(\underline{u}+\underline{v})$

$=\underline{u}\cdot\underline{u}+\underline{u}\cdot(-\underline{v})+(-\underline{v})\cdot\underline{u}+(-\underline{v})\cdot(-\underline{v})+\underline{u}\cdot\underline{u}+\underline{u}\cdot\underline{v}+\underline{v}\cdot\underline{u}+\underline{v}\cdot\underline{v}$

$=\underline{u}\cdot\underline{u}-(\underline{u}\cdot\underline{v})-(\underline{v}\cdot\underline{u})+\underline{v}\cdot\underline{v}+\underline{u}\cdot\underline{u}+\underline{u}\cdot\underline{v}+\underline{v}\cdot\underline{u}+\underline{v}\cdot\underline{v}$

$=2(\underline{u}\cdot\underline{u})+2(\underline{v}\cdot\underline{v})=2\|\underline{u}\|^2+2\|\underline{v}\|^2$

3 a) *) Zij $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^2$, dan geldt $S(\underline{x}+\underline{y}) = S\left(\begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} -3(x_1+y_1)+5(x_2+y_2) \\ 6(x_1+y_1)-10(x_2+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1+5x_2 \\ 6x_1-10x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3y_1+5y_2 \\ 6y_1-10y_2 \end{bmatrix}$$

$$= S(\underline{x}) + S(\underline{y})$$

*) Zij $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ en $\alpha \in \mathbb{R}$, dan geldt $S(\alpha\underline{x}) = S\left(\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} -3(\alpha x_1)+5(\alpha x_2) \\ 6(\alpha x_1)-10(\alpha x_2) \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -3x_1+5x_2 \\ 6x_1-10x_2 \end{bmatrix} = \alpha S(\underline{x})$$

<u>N.B.</u> Men kan uiteraard ook zeggen: $S(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -10 \end{bmatrix}\underline{x}$ voor elke $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$. Dus afbeelding S is een matrixtransformatie en bijgevolg lineair.

b) NUL(S) wordt bepaald door op te lossen $S(\underline{x}) = \underline{0}$. Hieruit volgt dat $NUL(S) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ en $\left\{\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis in NUL(S)

R(S) bevat de beeldvectoren $S(\underline{x}) = x_1\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$ waarbij $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Hieruit volgt dat

$R(S) = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$ en $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$ is een basis in R(S).

c) De standaardmatrix van afbeelding T is:

$\begin{bmatrix} T(\underline{e}_1) & T(\underline{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$ en het voorschrift

is: $T(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}\underline{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x_2 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x_2 \end{bmatrix}$