1 a
1 c

Technische Universiteit Delft
Faculteit Electrotechniek, Wiskunde en Informatica (EWI)
Mekelweg 4, Delft

Tussentoets Lineaire Algebra, wi2273TA
Donderdag 30 oktober 2003, 14.00-16.00 uur

- Gebruik van een zakcalculator is toegestaan.
- Deze toets bestaat uit twee gedeelten. Het eerste gedeelte bestaat uit negen vragen,waarop met een betrekkelijk eenvoudige rekenpartij of redenering een antwoord kan worden gevonden. Dit antwoord wordt goed of fout gerekend. Een goed antwoord wordt met 1 punt gewaardeerd. In het tweede gedeelte worden bewijzen, redeneringen en uitgebreidere rekenpartijen gevraagd. Elk onderdeel is maximaal $1\frac{1}{2}$ punten waard. Bij deze vragen kan een onvolledige beantwoording of een beantwoording waarin (reken)fouten optreden nog een deel van het maximaal te behalen aantal punten opleveren.
- Het eindcijfer wordt (**in 1 decimaal nauwkeurig**) berekend volgens de formule (score+2)/2 en volgens de gemaakte afspraken gebruikt om het resultaat van het reguliere tentamen (dat in januari afgenomen wordt) eventueel te verhogen.

HET EERSTE GEDEELTE

(Geef op het antwoordvel duidelijk aan wat je antwoord is. Alleen de antwoorden worden beoordeeld, niet het bijbehorende rekenwerk.)

1. Bepaal voor welke waarden van β het lineaire stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 + (\beta - 4)x_2 + 2x_3 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + (\beta + 2)x_3 &= 11 \\ x_1 - 3x_3 &= -5 \end{cases}$$

strijdig (engels: inconsistent) is.

2. Bepaal voor welke waarde(n) van α de kolommen van matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2\alpha \\ 1 & \alpha & 4 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \end{bmatrix}$ afhankelijk zijn.

3. In de matrix $(A^TB)^T$ staat op de positie i,j (dus in rij i en kolom j) het inprodukt van:

- **a.** kolom i van A en kolom j van B
- **b.** kolom j van A en kolom i van B
- **c.** rij i van A en rij j van B
- **d.** rij j van A en rij i van B

4. Gegeven is dat de 3×5 – matrix A, met de resp. kolommen $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4$ en $\underline{a}_5$, kan worden geveegd tot de echelonmatrix $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 17 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 23 & -5 \end{bmatrix}$. De kolommen van B noemen we resp. $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ en $\underline{b}_5$. Nu geldt:

- **a.** $COL(A) = Span\{\underline{b}_1, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ en $\dim(NUL(A)) = 2$
- **b.** $COL(A) = Span\{\underline{b}_1, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ en $\dim(NUL(A)) = 3$
- **c.** $COL(A) = Span\{\underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$ en $\dim(NUL(A)) = 2$
- **d.** $COL(A) = Span\{\underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4\}$ en $\dim(NUL(A)) = 3$

5. Gegeven is dat het lineaire stelsel vergelijkingen $A\underline{x} = \underline{0}$, waarbij A een 3×6 –matrix is, twee vrije variabelen heeft. Bepaal de rang van A.

6. Gegeven is de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met standaardmatrix $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Bepaal een **basis** in de beeldruimte (engels: range) van T.

7. Gegeven is de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ met standaardmatrix $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Bepaal een **basis** in de nulruimte (engels: nullspace) van T.

8. De lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de spiegeling in de lijn $x_1 = x_2$ gevolgd door de rotatie om $(0,0)$ over π radialen. Geef de standaardmatrix (representatiematrix) van T.

9. Gegeven zijn de vectoren $\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ en de lineaire deelruimte $U = Span\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$ in $\mathbb{R}^4$. Schrijf $\underline{y}$ als de som van een vector $\underline{v}$ en $\underline{w}$ waarbij $\underline{v} \in U$ en vector $\underline{w}$ loodrecht staat op **elke** vector uit U.

HET TWEEDE GEDEELTE

(Bij deze vragen dient elk antwoord duidelijk beargumenteerd te worden)

1. a. Gegeven zijn de $n \times n$ –matrix A en de verzameling $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$. **Bewijs** dat W een lineaire deelruimte in $\mathbb{R}^n$ is.

   b. Gegeven zijn de inverteerbare $n \times n$ – matrices A, B en C. **Bewijs** dat ABC inverteerbaar is en dat geldt $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

   c. Zij $H = Span\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_p\}$ met $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_p \in \mathbb{R}^n$ en $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ waarbij $\underline{x} \perp \underline{w}_i$ voor elke $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. **Bewijs** dat $\underline{x}$ loodrecht staat op **elke** vector uit H.

2. De vectoren $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\underline{p} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en de lineaire deelruimte $W = Span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ worden gegeven in $\mathbb{R}^4$

   a. Bepaal een orthogonale basis in W.

   b. Bepaal de orthogonale projectie van $\underline{p}$ op W.

   c. Zij $\underline{q}$ de component van $\underline{p}$ die loodrecht staat op W (dus op elke vector uit W) en ϕ de hoek tussen $\underline{p}$ en $\underline{q}$. Bepaal $\cos(\phi)$.