DE ANTWOORDEN VAN DE EXTRA VRAGEN

1. a) $\alpha = 3$ en $\beta \neq 7$

   b) $\underline{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ met $\underline{x}_3 \in \mathbb{R}$

2. a) $p = 1$

   b) $p = 12$

3. $\alpha \neq 1$

4. a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 2\,\underline{a}_1 - 3\,\underline{a}_2 + \underline{a}_3$

   b) Nee

5. a)$\beta = 7$

   b) Nee, alleen als $-2\,c_1 + 3\,c_2 - 6\,c_3 + c_4 = 0$

6. $\gamma = 3$ of $\gamma = 4$

7. De uitspraak is waar

8. bijv. $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

9. Ga bijv. de drie voorwaarden na waaraan een lineaire deelruimte moet voldoen

10. $5 \leq p \leq 8$

11. a) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

    b) 3

12. Juist, gebruik het rangtheorema

13. $[\underline{x}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 9/5 \\ 21/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$

14. $T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Toon de lineariteit aan door bijv de twee lineariteitsvoorwaarden te verifiëren.

15. $\mathcal{R}(ST) = Span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

N.B. $NUL(ST) = Span \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en de standaardmatrix van ST is $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

17. a) Schrijf $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en toon aan dat $T(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}) = \underline{0}$

b) $Span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

18. a) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

b) $p = -2$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. a) $NUL(S) = Span \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, dus $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis in $NUL(S)$

b) $\mathcal{R}(S) = Span\,\{\underline{e}_1\}$, dus $\{\underline{e}_1\}$ is een basis in $\mathcal{R}(S)$

c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

20. Onjuist, neem bijv. $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ en $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

21. $\beta \neq -\frac{4}{5}\sqrt{5}$ en $\beta \neq \frac{4}{5}\sqrt{5}$

22. $\alpha \neq 0$ en $\alpha \neq \frac{1}{5}$

23. $(AB^T)^{-1} = (B^{-1})^T A^{-1}$

24. a) Onjuist, neem bijv. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ en $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

    b) Juist, ga de 3 voorwaarden na

25. $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

26. $\underline{v} = \frac{1}{3}\underline{u}_1 + \frac{14}{3}\underline{u}_2 - \frac{5}{3}\underline{u}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ en $\underline{w} = \underline{y} - \underline{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

27. a) $\left\{ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

    b) de orthogonale projectie van $\underline{d}$ op $COL(C)$ is $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ en de k.k.o.(n) zijn $\underline{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ met $x_4 \in \mathbb{R}$

28. $y = \frac{1}{2} + 2\sqrt{1+x}$

29. a) 7

    bi) -28

    bii) -324

    biii) 16

    biv) 7

30. -32

31. a) $\alpha = 3$ of $\alpha = 7$ of $\alpha = -2$

    b) -108

32. 6

33. $\lambda = 2$ (alg. mult. = 3) en $\lambda = -2$ (alg. mult. =1)

34. $3 < x < 9$

35. $\gamma = 6$

36. a) $\lambda = -4$ (alg. mult. =2) en $\lambda = 1$ (alg. mult. =1)

b) $E_1 = Span \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ en $E_{-4} = Span \{\underline{e}_1\}$ als $\beta \neq \pm 2$

en $E_{-4} = Span \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ als $\beta = \pm 2$

c) B is diagonaliseerbaar als $\dim(E_{-4}) = 2$, dus als $\beta = \pm 2$.

(Dan is bijv. $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ een diagonalisatie/eigenwaardendecompositie van B)

37. a) A heeft eigenwaarde 0 als $p_A(0) = 0$, dus als $|A| = 0$. Dit is zo als $\alpha = \pm 1$, want $p_A(0) = |A| = (1+\alpha)^2(1-\alpha)$

b) $p_A(\lambda) = (1+\lambda)^2(1-\lambda)$, dus de eigenwaarden van A zijn $\lambda = -1$ (alg. mult.=2) en $\lambda = 1$ (alg. mult. =1). Daar $\dim(E_{-1}) = 1$ terwijl $\lambda = -1$ alg. mult. 2 heeft, is A niet diagonaliseerbaar.

38. Neem bijv. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

39. a) $p_{F_\alpha}(\lambda) = \lambda^2(-\lambda + 4 - \alpha)$ dus de eigenwaarden zijn $\lambda = 0$ (alg. mult. =2)

en $\lambda = 4 - \alpha$ (alg. mult. =1)

b) Neem bijv. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

40. a) $p_B(\lambda) = (\beta + 1 - \lambda)^2(5 + \beta - \lambda)$, dus de eigenwaarden zijn $\lambda = \beta + 1$ (alg. mult. =2) en $\lambda = 5 + \beta$ (alg. mult. =1)

b) de eigenwaarden met bijbehorende eigenruimten zijn $\lambda = 1$ (alg. mult. =2)

met $E_1 = Span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ en $\lambda = 5$ met $E_5 = Span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

dus men kan bijv. nemen $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ en $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

41. $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 0.3)$ dus de eigenwaarden zijn $\lambda = 1$ en $\lambda = 0.3$. De bijbehorende

eigenruimten zijn $E_1 = Span \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ en $E_{0.3} = Span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

Men kan vervolgens schrijven $\underline{x}_0 = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, dus

$\underline{x}_k = \frac{1}{7}\, 1^k \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{14}\, 0.3^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ voor $k \in \mathbb{N}$ en $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

42. a) ja, want A is een 3×3-matrix met 3 verschillende eigenwaarden

b) ja, want A heeft niet eigenwaarde 0

c) omdat A diagonaliseerbaar is kan men schrijven $A = P \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$ waarbij

P een 3×3-matrix is, met in de kolommen een basis van eigenvectoren van A in $\mathbb{R}^3$.

Dus $|A| = \left| P \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} \right| = |P| \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{|P|} = \frac{15}{8}$

d) nee, startvector $\underline{x}_0$ mag geen component hebben in E_{-3}, want deze component wordt

opgerekt met factor -3 als met A wordt vermenigvuldigd. Als men schrijft

$E_{-3} = span\,\{\underline{b}_1\}$, $E_{-\frac{5}{8}} = span\,\{\underline{b}_2\}$ en $E_1 = span\,\{\underline{b}_3\}$ heb je convergentie precies

dan als $\underline{x}_0 \in Span\,\{\underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ (merk op dat dan geldt $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k \in E_1$)

43. $\alpha = 3$

44. $\gamma = 3$ of $\gamma = 4$

45. $\left\{1 + 2t - t^2,\ 1 + 3t,\ t^2\right\}$

46. $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ 1\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

47. **a)** Ga de drie voorwaarden na waaraan een lineaire deelruimte moet voldoen of constateer dat U is op te vatten als een *Span*.

b) $\left\{x + x^2,\ \ 1 + x^3\right\}$

c) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

48. $\begin{bmatrix} -1\frac{1}{2} & -2 \\ 2\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$

49. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} & -2\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

50. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

51. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

52. $NUL(T) = Span\left\{1 - t^2\right\}$ en $R(T) = \mathbb{R}^2$

53. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

54. **a)** Ga de 2 lineariteitsvoorwaarden na.$\pi\pi$

    b) $NUL(T) = \mathbb{P}_0$ en $\mathcal{R}(T) = Span\left\{t,\, t^2\right\}$**a)** Ga de 2 lineariteitsvoorwa

    c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

    d) $\left\{1,\, t - \frac{1}{2},\, t^2 - t + \frac{1}{6}\right\}$

55. **a)** Ga de 2 lineariteitsvoorwaarden na.

    b) Een basis in $NUL(T)$ is $\{t\}$ en een basis in $\mathcal{R}(T)$ is $\left\{1,\, t^2\right\}$.

    c) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

    d) $\left\{1,\, \sqrt{t} - \frac{2}{3},\, t - \frac{6}{5}\sqrt{t} + \frac{3}{10}\right\}$

56. **a)** $\mathcal{R}(T) = \mathbb{P}_0$ (N.B. $NUL(T) = Span\,\{\sin(t),\, \cos(t)\}$).

    b) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

    c) $\left\{1,\, \sin(t),\, \cos(t) - \frac{2}{\pi}\right\}$

57. $\frac{1}{30}\sqrt{30}$

58. $p(x) = \alpha(1 - 5x^2)$ waarbij $\alpha \neq 0$