Uitwerking Tentamen Mechanica II (TN4120TA)

16 juni 2005

Opgave 1

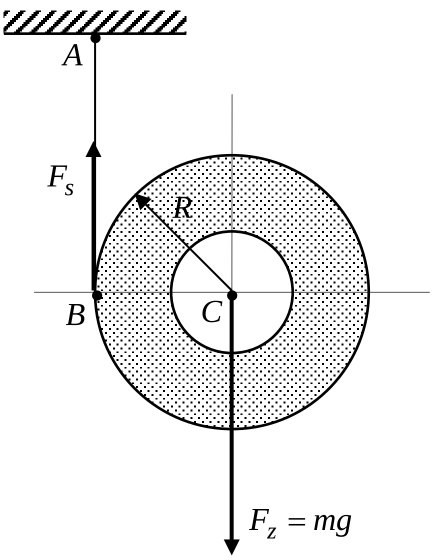
a) Neem een cilinderring met stralen tussen r en $r+dr$ ($R_0 < r < R$). De massa dm van deze cilinderring is $dm = \dfrac{2\pi r dr}{\pi R^2 - \pi R_0^2} m$. Hierin is $2\pi r dr$ de oppervlakte van de cilinderring en $(\pi R^2 - \pi R_0^2)$ de oppervlakte van de hele cilinder. Het traagheidsmoment I_C t.o.v. de centrale as wordt hiermee

$$I_C = \int r^2 dm = \int_{R_0}^{R} r^2 \frac{2\pi r dr}{\pi R^2 - \pi R_0^2} m = \frac{2m}{R^2 - R_0^2} \int_{R_0}^{R} r^3 dr = \tfrac{1}{2} m \frac{R^4 - R_0^4}{R^2 - R_0^2} = \tfrac{1}{2} m (R^2 + R_0^2)\,. \qquad (1)$$

b) De kortste manier is om de beweging als een zuivere rotatie om het “vaste” punt B te beschouwen $\Rightarrow$ BWV $M_{z,B} = \dfrac{dL_{z,B}}{dt} = I_B \dfrac{d\omega}{dt}$. (2)

Uitwerken van deze BWV (definieër een rotatie met de klok mee als positief) en gebruikmakend van Steiner geeft (zie ook figuur)

$$mgR + F_s.0 = I_B \dot{\omega} = (I_C + mR^2)\dot{\omega} \qquad (3)$$



De rolvoorwaarde $v_C = \omega R$ geeft $\dot{v}_C = a_C = \dot{\omega} R$ en invullen in (3) leidt tot

$$mgR = (I_C + mR^2)\frac{a_C}{R} \quad \Rightarrow \quad a_C = \frac{mgR^2}{I_C + mR^2}$$

Invullen van $I_C = \tfrac{1}{2} m (R^2 + R_0^2)$ in deze betrekking geeft voor de versnelling a_C

$$a_C = \frac{g}{1 + \tfrac{1}{2}(1 + R_0^2 / R^2)} \qquad (4)$$

Voor $R_0 \to 0$ wordt (4) $a_C = \frac{2}{3}g$ en voor $R_0 \to R$ wordt (4) $a_C = \frac{1}{2}g$.

Ook is het mogelijk om de beweging te beschrijven als een translatie en een rotatie van het massamiddelpunt: $\vec{F} = \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_C$ en $M_{z,C} = \dfrac{dL_{z,C}}{dt} = I_C \dfrac{d\omega}{dt}$. Dit leidt tot hetzelfde resultaat.

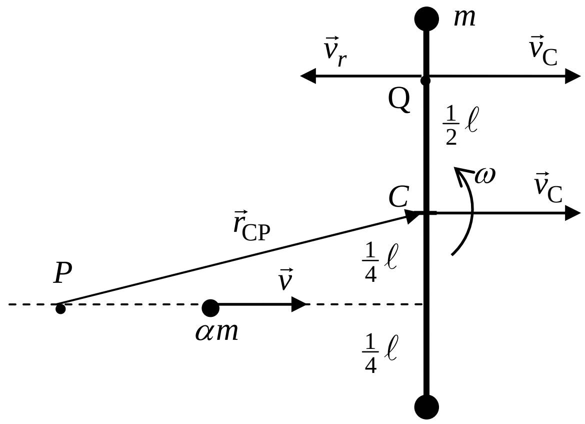
c) Gebruik $\vec{F} = \sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_C \;\Rightarrow\; mg - F_s = ma_C$. Als $R_0 \to 0$ is $a_C = \frac{2}{3}g \;\Rightarrow\; F_s = \frac{1}{3}mg$ en als $R_0 \to R$ is $a_C = \frac{1}{2}g \;\Rightarrow\; F_s = \frac{1}{2}mg$.

Opgave 2

a) Het impulsmoment $\vec{L}_\mathrm{P}$ van het systeem bestaat uit twee componenten $\vec{L}_\mathrm{P} = \vec{L}_\mathrm{P}(\alpha m) + \vec{L}_\mathrm{P}(\mathrm{staaf})$. Vóór de botsing geldt voor het impulsmoment $\vec{L}_\mathrm{P}(\alpha m) = 0$, omdat punt *P* op de drager van $\vec{v}$ ligt. Omdat de staaf voor de botsing stil ligt is ook $\vec{L}_\mathrm{P}(\mathrm{staaf}) = 0$. Dus $\vec{L}_\mathrm{P} = 0$ voor de botsing. Verder is $\vec{L}_\mathrm{P}$ voor de botsing gelijk aan $\vec{L}_\mathrm{P}$ na de botsing, omdat $\vec{M}_\mathrm{P} = 0$ (dan is $\dfrac{d\vec{L}_\mathrm{P}}{dt} = 0$).

Dus ook na de botsing geldt $\vec{L}_\mathrm{P} = 0$.

b) Het percussiepunt ligt boven het massamiddelpunt *C*, stel op afstand *x* van *C* (zie ook de figuur). Na de botsing is $\vec{L}_\mathrm{P}(\alpha m) = 0$ en $\vec{L}_\mathrm{P} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{L}_\mathrm{P} = \vec{L}_\mathrm{P}(\mathrm{staaf}) = \vec{L}_\mathrm{C} + \vec{r}_\mathrm{CP} \times (2m\vec{v}_\mathrm{C}) = 0$. Dus voor de *z*-componenten van $\vec{L}_\mathrm{P}$ geeft dit: $-I_\mathrm{C}\omega + \frac{1}{4}\ell 2mv_\mathrm{C} = 0$ en samen met $I_C = 2m(\frac{1}{2}\ell)^2$ resulteert dit in de betrekking $v_C = \omega\ell$. Het percussiepunt Q doet mee aan twee soorten bewegingen: een translatie (v_C) en een rotatie (ω) waardoor het een snelheid $v_r = \omega x$ krijgt. Voor het percussiepunt geldt $v_r = v_\mathrm{C} \;\Rightarrow\; \omega x = \omega\ell$ ofwel $x = \ell$. Het percussiepunt ligt dus <u>niet</u> op de staaf of met andere woorden de staaf heeft geen percussiepunt.



c) De volgende behoudswetten kunnen worden toegepast:

- Behoud van kinetische energie, omdat de botsing volkomen elastisch is (BW1).
- Behoud van impuls, omdat er geen externe krachten op het systeem werken (BW2).
- Behoud van impulsmoment t.o.v. <u>ieder</u> punt, omdat er geen externe krachtmomenten op het systeem werken (BW3).

d) Toepassen BW1 geeft: $\frac{1}{2}\alpha m v^2 = \frac{1}{2}\alpha m u^2 + \frac{1}{2}2m v_C^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{1}{2}m\ell^2}_{I_C}\omega^2 \;\Rightarrow$

$$\alpha(v^2 - u^2) = \alpha(v+u)(v-u) = 2v_C^2 + \frac{1}{2}\omega^2\ell^2 \qquad (1)$$

Toepassen BW2 geeft: $\alpha m v = \alpha m u + 2m v_C \;\Rightarrow$

$$\alpha(v-u) = 2v_C \qquad (2)$$

Toepassen BW3 geeft: $\vec{L}_C(\text{voor}) = \vec{L}_C(\text{na}) \;\Rightarrow\; \alpha m v \frac{1}{4}\ell = \alpha m u \frac{1}{4}\ell + \frac{1}{2}m\ell^2\omega \;\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\alpha(v-u) = \omega\ell \qquad (3)$$

Substitutie van $\alpha(v-u)$ uit (2) in (1) geeft: $v_C = \omega\ell$ (dit is in overeenstemming met onderdeel b)) en substitutie in (1) geeft:

$$v + u = \frac{5}{4}v_C \qquad (4)$$

Uit (2) en (4) kunnen v en u worden uitgedrukt in v_C en α: $2u = v_C(\frac{5}{4} - \frac{2}{\alpha})$ en $2v = v_C(\frac{5}{4} + \frac{2}{\alpha})$.
Gegeven is dat $u = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{8}{5} \;\Rightarrow\; \boxed{v_C = \frac{4}{5}v}$ en uit $v_C = \omega\ell$ volgt dan $\boxed{\omega = \frac{4\ell}{5v}}$.

Opgave 3

a) In elke oplossing (zwak, kritisch en sterk gedempt) van de gedempte trilling komt de exponetiële term $e^{-\alpha t}$ voor. Omdat αt dimensieloos moet zijn, volgt dat $[\alpha] = [s^{-1}]$. Ook kan het aangetoond worden met de wrijvingskracht: $F_w = r\dfrac{dx}{dt} \;\Rightarrow\; [kg\,\frac{m}{s^2}] = [r][\frac{m}{s}] \;\Rightarrow\; [r] = [\frac{kg}{s}]$ en volgens de definitie is $\alpha = \frac{r}{2m} \;\Rightarrow\; [\alpha] = \frac{[r]}{[m]} = [\frac{kg}{s}]/[kg] = [s^{-1}]$.
$r = 2\alpha m = 2\,\text{kgs}^{-1}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{b}{m}} = 10\,s^{-1}$ en $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11} = 9{,}9499\,s^{-1}$.

b) De bewegingsvergelijking van een gedempt massa-veersysteem is $m\ddot{x} + r\dot{x} + bx = 0$.
Omdat $\omega_0^2 > \alpha^2$ is de trilling zwak gedempt waarvan de algemene oplossing gegeven wordt door

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \beta) \qquad (1)$$

c) De amplitude van deze trilling is $Ae^{-\alpha t}$ en deze is A voor $t = 0$.
De factor volgt uit $\dfrac{Ae^{-\alpha t}\big|_{t=3}}{Ae^{-\alpha t}\big|_{t=0}} = e^{-3} = 0.0478$, dus de amplitude is na 3 s ongeveer 20 maal zo klein geworden.

d) Uit (1) volgt $v = \dot{x}(t) = -A\alpha e^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \beta) - A\omega_1 e^{-\alpha t}\sin(\omega_1 t + \beta)$. En met de beginvoorwaarde $v = \dot{x}(0) = 0$ volgt $\alpha\cos(\beta) + \omega_1\sin(\beta) = 0 \;\Rightarrow\; \tan\beta = -\dfrac{\alpha}{\omega_1} = -\dfrac{1}{9.9499} = -0.1005 \;\Rightarrow$
$\beta = -0.1002\,\text{rad}$. De beginvoorwaarde $x(0) = 0.1000$ geeft $A\cos\beta = 0.1000 \;\Rightarrow\; A = 0.1005\,\text{m}$.

Op $t = 0$ is de amplitude dus $A = 0.1005\,\mathrm{m}$ en $x(0) = 0.1000 \;\Rightarrow\; A - x(0) = 0.0005\,\mathrm{m}$.

e) Voor dit tijdstip t_0 geldt dus $x(t_0) = Ae^{-\alpha t_0}$ ofwel $\cos(\omega_1 t_0 + \beta) = 1 \;\Rightarrow\; \omega_1 t_0 + \beta = n2\pi$ met $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. De eerste keer dat dit gebeurt is $n = 0$ ofwel $\omega_1 t_0 = -\beta \;\Rightarrow\; t_0 = 0.0101\,s$.