Uitwerking Tentamen Mechanica II (TN4120TA)

23 augustus 2005

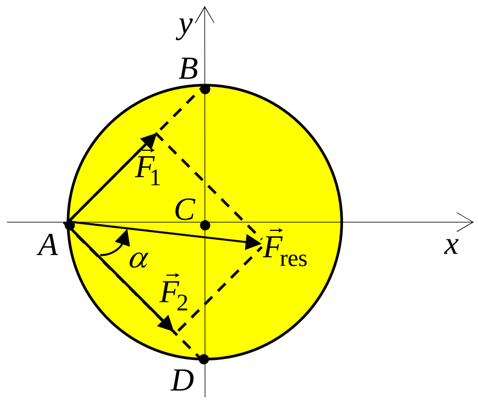
Opgave 1

a) Omdat $\angle BAD = 90^\circ$ wordt de grootte van de resultante $F_{\text{res}} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ (zie figuur).

Voor de richting vinden we: $\tan\alpha = \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{3}{4} \;\Rightarrow\; \alpha = \arctan 0.75 = 0.64\,\text{rad}$. Omdat

$\angle CAD = 45^\circ = \frac{1}{4}\pi$ vinden we voor de hoek β die de resultante $\vec{F}_{\text{res}}$ met de *x*-as maakt:

$\beta = \frac{1}{4}\pi - \alpha = 0.14\,\text{rad}$.



b) Newton II geeft $\vec{F}_{\text{res}} = m\dfrac{d\vec{v}_C}{dt} \;\Rightarrow\; \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{F_{\text{res}}}{m} = 5 \;\Rightarrow\; v_C(t) = 5t + c$ en omdat op $t = 0$ de

schijf stil ligt is $c = 0$ ofwel $v_C(t) = 5t$. De kinetische translatie-energie is

$E_{\text{kin,tr}} = \frac{1}{2}mv_C^2 = 12.5t^2$.

c) Het krachtmoment $\vec{M}_{1,C}$ t.g.v. kracht $\vec{F}_1$ is $\vec{M}_{1,C} = \vec{r}_{CA} \times \vec{F}_1 \;\Rightarrow\; M_{1,C} = -RF_1\sin(135^\circ) = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$.
De richting is in de negatieve *z*-as. Op dezelfde manier is $M_{2,C} = RF_2\sin(135^\circ) = 2\sqrt{2}$. De richting is in de positieve *z*-as. Het totale krachtmoment is dan
$M_{\text{tot},C} = M_{1,C} + M_{2,C} = -\frac{3}{2}\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. De richting is in de positieve *z*-as.

d) Bewegingsvergelijking voor rotatie $M_z = \dfrac{dL_z}{dt}$ ofwel $M_{\text{tot},C} = I_{z,C}\dfrac{d\omega}{dt} \;\Rightarrow\; \omega(t) = t\sqrt{2}$. En de

rotatie-energie is $E_{kin,rot} = \frac{1}{2}I_{z,C}\omega^2 = \frac{1}{2}t^2$.

Opgave 2

a) Bewegingsvergelijking voor een roterend systeem $\vec{M}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$, waarbij de cilinder het systeem is en A een punt op de as is van de cilinder. Dan is ook $M_{z,A} = \frac{dL_{z,A}}{dt}$. En voor kleine uitwijkingen is, door torsie, het terugdrijvend krachtmoment $M_{z,A} = -b'\varphi$. Hiermee wordt de bewegingsvergelijking voor deze torsieslinger $-b'\varphi = \frac{dL_{z,A}}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ ofwel

$$I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} + b'\varphi = 0\,.$$

De algemene oplossing hiervan is $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \beta)$ met $\omega_0^2 = \frac{b'}{I_z}$, φ_0 en β zijn constanten die door de beginvoorwaarden worden bepaald.

b) Uit $M_{z,A} = -b'\varphi$, met φ in radialen, volgt $[M_{z,A}] = [b']$ en de eenheid van een krachtmoment is [Nm].

c) De hoekfrequentie volgt uit $\omega_0^2 = \frac{b'}{I_z} = \frac{b'}{\frac{1}{2}mR^2} = 4\pi^2 \;\Rightarrow\; \omega_0 = 2\pi\,\text{rad}/s$. En de slingertijd T volgt uit $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1s$.

d) De torsiehoek als functie van de tijd is $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \beta)$. Dus op $t = 0$ geldt:

$$\varphi(0) = \varphi_0 \cos\beta = \frac{\pi}{60}\,. \tag{1}$$

En de snelheid volgt uit $v(t) = \omega(t)R = \dot{\varphi}(t)R = -\varphi_0\omega_0 R\sin(\omega_0 t + \beta)$ en voor $t = 0$ samen met $R = 0.05$ en $\omega_0 = 2\pi$ geeft dit:

$$\varphi_0 \sin\beta = \frac{\pi}{60} \tag{2}$$

Uit (1) en (2) volgt $\tan\beta = 1 \;\Rightarrow\; \boxed{\beta = \frac{1}{4}\pi\,\text{rad}}$. Dan is $\cos\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en met (1) volgt dan $\boxed{\varphi_0 = \frac{\pi}{60}\sqrt{2}}$. De torsiehooek als functie van de tijd wordt hiermee $\boxed{\varphi(t) = \frac{\pi}{60}\sqrt{2}\cos(2\pi t + \frac{1}{4}\pi)}$.

e) Voor de slingertijd geldt de formule $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{b'}}$. Voor een holle, dunwandige cilinder met straal R en massa m is het traagheidsmoment $I_z^{(hc)} = mR^2 > I_z = \frac{1}{2}mR^2$. Dit betekent dat de trillingstijd T groter ($T = \sqrt{2}\,\text{s}$) wordt en de hoekfrequentie φ_0 ($\omega_0 = \sqrt{2}\pi\,\text{rad/s}$) kleiner.

Opgave 3

a) Omdat een asje (dat rust op twee steunpunten) bevestigd is aan de lat kan het massamiddelpunt C tijdens de botsing niet bewegen.
De impuls $\vec{p}_{\text{sys}}$ van het systeem (lat en kogel) is <u>niet</u> behouden, omdat er een externe krachtstoot vanuit de as op het massamiddelpunt C wordt gegeven.
Om dezelfde reden is het impulsmoment $\vec{L}_A$ <u>niet</u> behouden. Het impulsmoment $\vec{L}_C$ is echter <u>wel</u> behouden, omdat de krachtstoot een drager heeft die door het massamiddelpunt C gaat.

b) Omdat de botsing volkomen elastisch is de kinetische energie $E_{\text{kin,sys}}$ van het systeem behouden. Verder is $\vec{L}_C$ behouden (zie onderdeel a)). Gebruik deze behoudswetten om u en ω te berekenen.

- $E_{\text{kin,sys}}$ behouden $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}3mv^2 = \frac{1}{2}3mu^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\tfrac{1}{12}m\ell^2}_{I_{z,C}}\omega^2 \Rightarrow$

$$(v+u)(v-u) = \tfrac{1}{36}\ell^2\omega^2 \qquad (1)$$

- $\vec{L}_C$ behouden $\Rightarrow$ $3mvx = 3mux + I_{z,C}\omega \Rightarrow$

$$v-u = \frac{\ell^2\omega}{36x} \qquad (2)$$

Uit (1)/(2) volgt $v+u=\omega x$. (3)

En uit (3) – (2) volgt dan $\boxed{u = \tfrac{1}{2}\omega x(1-\frac{\ell^2}{36x^2})}$. (4)

c) Uit (4) volgt dat $u=0$ als $\dfrac{\ell^2}{36x^2}=1 \Rightarrow x=\tfrac{1}{6}\ell$.

Substitutie van $u=0$ en $x=\tfrac{1}{6}\ell$ in (3) geeft $\omega = \dfrac{6v}{\ell}$.

d) Uit Newton II $\sum_i \vec{F}_i = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$ volgt $\vec{p}_{\text{na}} - \vec{p}_{\text{voor}} = \sum_i \int_\tau \vec{F}_i\, dt$ met τ de duur van de botsing. Omdat de lat na de botsing geen translatie heeft en $u=0$ volgt $\vec{p}_{\text{na}}=0$. Voor de botsing heeft alleen de kogel een snelheid ofwel $\vec{p}_{\text{voor}} = -3mv\vec{\mathrm{k}}$. $\Rightarrow$ $\vec{0}-(-3mv)\vec{\mathrm{k}} = \int_\tau \vec{F}_{\text{as}}\,dt + \int_\tau \vec{F}_{\text{kogel}}\,dt + \int_\tau \vec{F}_{\text{lat}}\,dt$ en omdat $\int_\tau \vec{F}_{\text{kogel}}\,dt = -\int_\tau \vec{F}_{\text{lat}}\,dt$ volgt $\int_\tau \vec{F}_{\text{as}}\,dt = 3mv\vec{\mathrm{k}}$