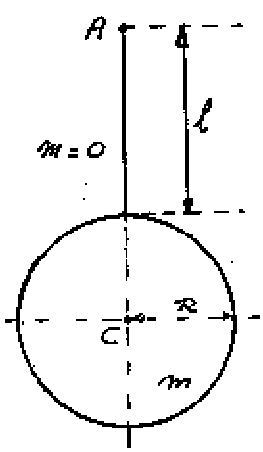
Tentamen tn412, Mechanica II voor TA

12 april 2000, 14.00 u - 17.00 u

Waardering: Alle vraagstukken 25 pt.

1.



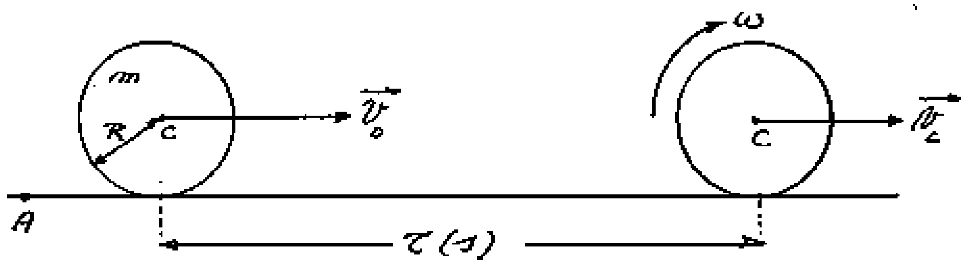
Gegeven:
Aan een massaloze staaf met lengte ℓ is een zeer dunne, massieve schijf bevestigd, zodanig dat het verlengde van de staaf door het massacentrum C van de schijf zou gaan.
De massa van de schijf is m, zijn straal R.
Het geheel kan in het vlak van tekening (zie de fig.) slingeren om punt A, de bovenkant van de staaf.

a. Bewijs dat het traagheidsmoment I_c van de schijf om een as door C en loodrecht op de schijf, gelijk is aan $mR^2/2$.

b. Druk de slingertijd T van de slinger *voor kleine uitwijkingen* uit in m, R en ℓ.

c. Bereken de gereduceerde slingerlengte ℓ_r van de slinger voor de gevallen dat $\ell = 0$, $\ell = R$ en $\ell \gg R$.

2.



Een massieve, rechte cilinder met massa m en straal R wordt met snelheid $\vec{v}_0$ over een ruwe ondergrond gegooid. De as van de cilinder staat loodrecht op $\vec{v}_0$.

Eerst "schuift" de cilinder zonder te rollen over de ondergrond. Na verloop van een tijd τ begint hij echter te rollen met hoeksnelheid ω, en met snelheid $\vec{v}_c$ van het massacentrum C.

a. Is de kinetische energie behouden voor $t < \tau$? Waarom wel of niet?
Is de impuls dan behouden? Waarom wel of niet?

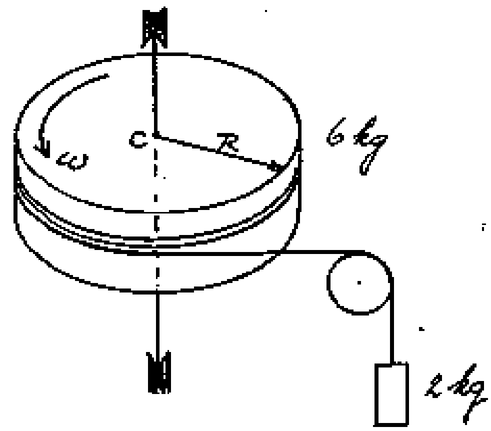
b. Is het impulsmoment voor $t < \tau$ behouden t.o.v. C?
Is het impulsmoment in dat geval behouden t.o.v. A?
Beredeneer in beide gevallen je antwoord.

c. Het blijkt, dat $v_c = q \cdot v_0$, met $q < 1$. Bereken q.

d. Als je van mening bent dat de de kinetische energie is afgenomen (zie a), welk deel van de energie is dan verloren gegaan tussen de twee getekende situaties?

3.

Door de as van een massieve schijf is een massaloze as gestoken. Deze as is in verticale positie gelagerd.
De straal van de schijf is $R = 0,1$ (m); de massa is $m = 6$ (kg).
Rond de schijf is een massaloos koord gewonden dat over een eveneens massaloze katrol loopt. Aan het uiteinde van het koord hangt een massa van 2 (kg).



a. Als de massa van 2 kg gaat bewegen, bereken dan zijn versnelling a, en ook $\dot{\omega}$ van de schijf en de spankracht F_s in het koord. $g = 10$ m/s^2.

b. Bereken de verandering van mechanische energie van de schijf ΔE_s in Joules als functie van de tijd (op $t = 0$ staat alles nog stil).

c. Bereken de verandering van mechanische energie ΔE_m van de 2 kg-massa als functie van de tijd. Wat verwacht je te vinden voor de som $\Delta E_s + \Delta E_m$? Blijkt dat ook inderdaad uit je antwoorden?

Z O Z !

4.

Een massa van m = 2 (kg) voert een lineaire, gedempte trilling uit langs de x-as, waarbij de veerkracht gelijk is aan $F_v = -bx$ met de veerconstante b = 288 N/m, en de wrijvingskracht $F_w = -r\dot{x}$ met de wrijvingsconstante r = 50 Ns/m.

a. Bereken ω_0.

b. Is dit een zwak-, kritiek- of sterk gedempte trilling?

De massa wordt geforceerd aangedreven door een kracht langs de x-as als volgt: $F = 120\cdot\cos(\omega t)$

c. Schrijf de bewegingsvergelijking op.

d. Nu gelden de volgende bijzondere condities:

1) de aandrijf-hoekfrequentie is ω_0.

2) de aanloopverschijnselen zijn geheel verdwenen, zodat de uitwijking x kan worden geschreven als: $x = \hat{x}\cdot\cos(\omega_0 t - \varphi)$.

<u>Bereken $\hat{x}$ en φ</u>

Aanwijzingen: Substitueer de bekende functies in de bewegingsvergelijking, bedenk dat ω_0 een heel bijzondere frequentie is, en bedenk ook dat $\sin(\omega_0 t - \varphi) = -\cos(\omega_0 t - \varphi + \pi/2)$

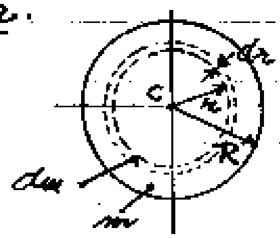
TENTAMEN MECHANICA II VOOR TA 2

tn 412.

12-04-2000

UITWERKINGEN.

1. a.



Voor het ringetje tussen r en r+dr is: $dI = dm \cdot r^2$

$dm = m \cdot \frac{dS}{S} = \frac{m \cdot 2\pi r\,dr}{\pi R^2}$, dus:

$dI = \frac{2m}{R^2} \cdot r^3\,dr$, en $I = \int_{r=0}^{R} \frac{2m}{R^2} r^3\,dr = \frac{1}{2} mR^2$

b. $T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{Smg}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mR^2 + m(l+R)^2}{(l+R)mg}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2+2(l+R)^2}{2g(l+R)}}$

c. Def: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$, dus: $l_r = \frac{R^2+2(l+R)^2}{2(l+R)}$.

$l = 0 \to l_r = \frac{3}{2}R$; $l = R \to l_r = \frac{9}{4}R$, en $l \gg R \to l_r = l$.

#

2. a. Nee, want er zijn wrijvingskrachten.

Nee, want er zijn externe (=wrijvings) krachten.

b. Nee, want de wrijvingskracht langs het oppervlak heeft een krachtmoment t.o.v. C. $\vec{M}_C = \dot{\vec{L}}_C$, dus $\dot{\vec{L}}_C \neq \vec{0}$.

Ja, want A ligt op de drager van $\vec{F}_w$

c. $\vec{L}_A$ is behouden $\Rightarrow$ $\vec{L}_A$ (situatie 1) = $\vec{L}_A$ (situatie 2).

Met de impulsmomentstelling: $\vec{L}_A = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$ de getalwaarden in de 2 gevallen aan elkaar gelijk stellen:

$m v_0 R = I_C\omega + m v_C R = \frac{1}{2} mR^2 \frac{v_C}{R} + m v_C R = \frac{3}{2} m v_C R$ (1)

Hierbij is de rolvoorwaarde gebruikt (situatie 2!): $v_C = \omega R$.

d. $E_k(1) = \frac{1}{2} m v_0^2$

$E_k(2) = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} mR^2 \left(\frac{v_c}{R}\right)^2 = \frac{3}{4} m v_c^2$

$= \frac{3}{4} m \left(\frac{2}{3} v_0\right)^2 = \frac{1}{3} m v_0^2$.

Dus: $\frac{3}{6} m v_0^2 \rightarrow \frac{2}{6} m v_0^2$. Verloren: $\frac{1}{6} m v_0^2$, d.i. $\frac{1}{3}$ deel

#

3. a Voor het berekenen van de drie onbekenden gebruiken we de volgende 3 relaties:

1) Bewegingsvergelijking voor het 2 kg-gewicht.
2) " voor de schijf
3) de rolvoorwaarde.

1): $2g - F_s = 2a$ (1)
2): $\vec{M}_c = \dot{\vec{L}}_c \Rightarrow F_s R = I_c \dot{\omega} = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\omega}$ (2)
3): $v = \omega R \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{a}{R}$ (3)

(3) in (2): $F_s R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow F_s = \frac{1}{2} ma \Rightarrow F_s = 3a$

(1): $2g - F_s = 2a$ +

$2g = 5a$

dus: $a = 0{,}4g = 4\ m/s^2$

$F_s = 3a = 12\ N$

$\dot{\omega} = \frac{a}{R} = \frac{4}{0{,}1} = 40\ rad/s^2$

b. $\Delta E_s = \frac{1}{2} I_c \{\omega^2(t) - \omega^2(0)\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} m_s R^2 \omega^2 = \frac{3}{2}\cdot 10^{-2} \omega^2$ J

$\dot{\omega} = 40\ rad/s^2 \Rightarrow \omega = 40t\ rad/s$ ($t=0 \Leftrightarrow \omega = 0$)

dus: $\Delta E_s = \frac{3}{2}\cdot 10^{-2}\cdot 1600 t^2 = 24 t^2$ J

c. Hiervoor is er een ΔE_m (pot) en een ΔE_m (kin).

$\Delta E_m(pot) = -mg|\Delta h| = -2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}at^2 = -40t^2$

Samen: $\Delta E_m = +16t^2 - 40t^2 = -24t^2$ J

De som van de energieën van de 2 lichamen blijft dus gelijk (=0), zoals we konden verwachten in een gravitatieveld.

#

4. a. $\omega_0 = \sqrt{\frac{b}{m}} = \sqrt{144} = 12\ s^{-1}$

b. $\alpha = \frac{r}{2m} = \frac{50}{4} = 12{,}5$. $\quad \omega_0^2 - \alpha^2 = 12^2 - (12{,}5)^2 < 0$

dus: sterk gedempte trilling.

c. $F = m\ddot{x} + r\dot{x} + bx$

d. Substitueer: $F = 120\cos(\omega_0 t)$

$$x = \hat{x}\cos(\omega_0 t - \varphi)$$

$$\dot{x} = -\omega_0\hat{x}\sin(\omega_0 t - \varphi)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2\hat{x}\cos(\omega_0 t - \varphi) \quad :$$

$$120\cos(\omega_0 t) = -m\omega_0^2\hat{x}\cos(\omega_0 t - \varphi) - r\omega\hat{x}\sin(\omega_0 t - \varphi) + b\hat{x}\cos(\omega_0 t - \varphi)$$

$b = m\omega_0^2$, dus: $120\cos(\omega_0 t) = -r\omega\hat{x}\sin(\omega_0 t - \varphi)$

$$120\cos(\omega_0 t) = r\omega_0\hat{x}\cos(\omega_0 t - \varphi + \tfrac{\pi}{2})$$

Dan moet $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zijn, en $120 = r\omega_0\hat{x}$

dus:

$$\hat{x} = \frac{120}{\omega_0 r} = \frac{120}{12 \cdot 50} = 0{,}2\ m.$$

Dan is $x = 0{,}2\cos(12t - \frac{\pi}{2})$, of ook:

$$x = 0{,}2\sin(12t).$$

#

Formulelijst bij tn 412 (Mechanica II voor TA²).

Deze lijst wordt m.i.v. 1/1-'99 bij elk tentamen uitgereikt. De gebruiker dient op de hoogte te zijn van de gebruikte symbolen, alsook van de voorwaarden waaronder de verschillende formules geldig zijn. Formules waarvan wordt aangenomen dat iedereen ze kent (zoals de tweede wet van Newton: $\mathbf{F} = m\vec{a}$) zijn niet in deze lijst opgenomen. *N.B. Vetgedrukt symbool = vector.*

Eén deeltje:

$\vec{a}_{tan} = \dot{v}\,\vec{e}_{tan}$; $a_n = v^2/R$

$\vec{v}_{rad} = \dot{r}\,\vec{e}_r$; $\vec{v}_\varphi = r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

Ongedempte harm. trilling: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{b}}$

$P = \mathbf{F} \cdot \vec{v}$

$dE_k = \mathbf{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$

$\mathbf{F} = -\nabla E_p \rightarrow F_x = -\partial E_p/\partial x$ enz.!

Impuls- en krachtmoment:

$\mathbf{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$; $\mathbf{M} = \vec{r} \times \mathbf{F}$; $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$

N deeltjes:

$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$

Lichamen:

$L_z = I\omega_z$

$I = \int (r')^2\, dm$

$P = M_z\omega_z$ (star lichaam)

$d(\tfrac{1}{2}I\omega^2) = M_z d\varphi$ (id.)

$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$ (plat lichaam)

$I = I_C + ms^2$ (Steiner)

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{b'}}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{smg}}$

Vlakke beweging:

$\sum \mathbf{F} = m\vec{a}_C$ en $\mathbf{M}_C = \dot{\mathbf{L}}_C$

$E_k = \tfrac{1}{2}I_A\omega^2$

$E_k = \tfrac{1}{2}I_C\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv_C^2$

Lineair gedempte en gedwongen trillingen:

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{b}{m}}$ en $\alpha = \dfrac{r}{2m}$

Zwak: $x = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \beta)$

waarin $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

Kritiek: $x = (At + B)\, e^{-\alpha t}$

Sterk: $x = \left(A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{-\omega_1 t}\right) e^{-\alpha t}$

waarin $\omega_1 = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

$\tau = \dfrac{1}{2\alpha}$; $Q = \omega_1\tau$

$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$ bij $Q > \tfrac{1}{2}$