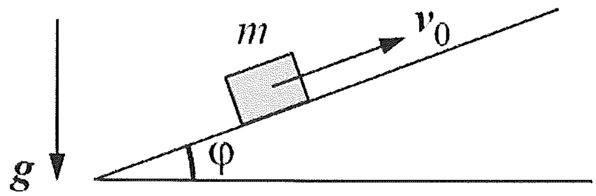
Tentamen Mechanica I (TN4110TA)

Dinsdag 31 maart 2009, 14.00 – 17.00 uur

- *Het tentamen bestaat uit drie opgaven*
- *Vermeld op elk blad uw naam en studienummer*
- *Het gebruik van syllabus, boeken e.d. is niet toegestaan*
- *Formuleblad is bijgevoegd*
- *Totaal 90 punten te scoren (30 per opgave)*

Opgave 1

Een blok (massa m) op een hellend vlak (hellingshoek φ) krijgt op $t = 0$ een snelheid $v_0 = 8$ [m s^{-1}] evenwijdig aan het vlak en schuin naar boven gericht (zie onderstaand figuur). De kinetische en statische wrijvingscoëfficiënt zijn respectievelijk $\mu_{kin} = 0.20$ en $\mu_{stat} = 0.25$. Gebruik voor berekeningen een versnelling van de zwaartekracht: g = 9.8 (m s^{-2})



Eerst wordt een hellingshoek φ van 13° gekozen (0.22 rad).

a) Teken de krachten die op het blok werken.
b) Wat is de afstand s die het blok aflegt voordat het tot stilstand komt?
c) Bereken de versnelling na het bereiken van het hoogste punt.

De hellingshoek φ wordt nu vergroot tot 20° (0.35 rad).

d) Bereken ook voor deze situatie de afstand s die het blok aflegt voor het tot stilstand komt, en de versnelling na het bereiken van het hoogste punt.
e) Met welke snelheid v_2 passeert het blok zijn oorspronkelijke positie (op $t = 0$)?
f) Maak de verhouding tussen v_0 en v_2 in enkele woorden aannemelijk.

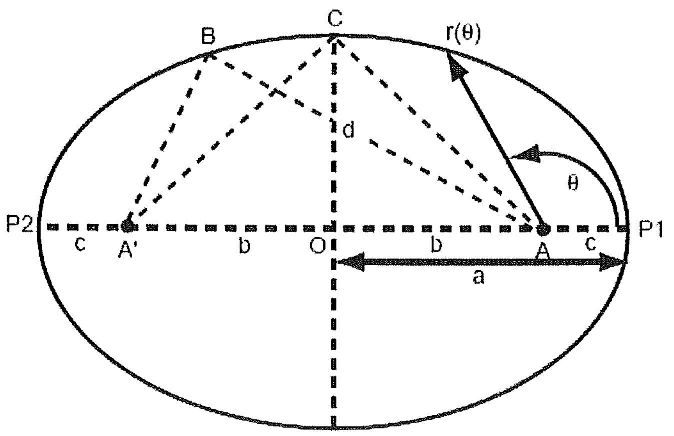
(elke deelopgave 5 punten)

Opgave 2

Een satelliet met massa *m* wordt door de gravitatiekracht van de aarde (massa *M*) in een baan *r(θ)* om de aarde gehouden. De vergelijking van deze ellipsvormige baan wordt gegeven door:

$$r(\theta) = \frac{\alpha}{1+\varepsilon\cos\theta} \qquad (1)$$

waarin $0 < \varepsilon < 1$ de excentriciteit van de baan is en α een constante. Deze baan is getekend in de onderstaande figuur. In deze figuur zijn de twee brandpunten A en A_0 van de ellips aangegeven.



In brandpunt A bevindt zich de aarde. Een ellips wordt gekenmerkt door het volgende: *de som van de afstanden van de brandpunten naar een punt op de ellips is voor ieder punt dezelfde*. Dus: de afstand ABA′ is gelijk aan de afstand ACA′. Met behulp van de stelling van Pythagoras en bovenstaande formule is eenvoudig af te leiden dat de volgende relaties gelden:

$$a = OP_1 = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2}; \quad b = OA = \frac{\varepsilon\alpha}{1-\varepsilon^2}; \quad c = AP_1 = \frac{\alpha}{1-\varepsilon}; \quad d = OC = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \qquad (2)$$

a) Leg uit dat de mechanische energie E_m constant is voor deze satelliet:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = constant \qquad (3)$$

waarin *r* de afstand van de aarde naar een punt op de baan is en $E_p(r)$ de potentiële energie op dat punt. Geef ook een uitdrukking voor de potentiële energie $E_p(r)$.

b) Leg uit dat het impulsmoment L_A ten opzichte van het centrum van de aarde constant is voor deze satelliet. Geef daarnaast een uitdrukking voor het impulsmoment *L* in de vorm: *L = . . . = constant.*

Gegeven: de snelheid in het punt P1 is gelijk is aan v_1.

c) Druk de snelheid v_2 in het punt P2 uit in termen van v_1 en andere constanten door gebruik te maken van de wet van behoud van impulsmoment.

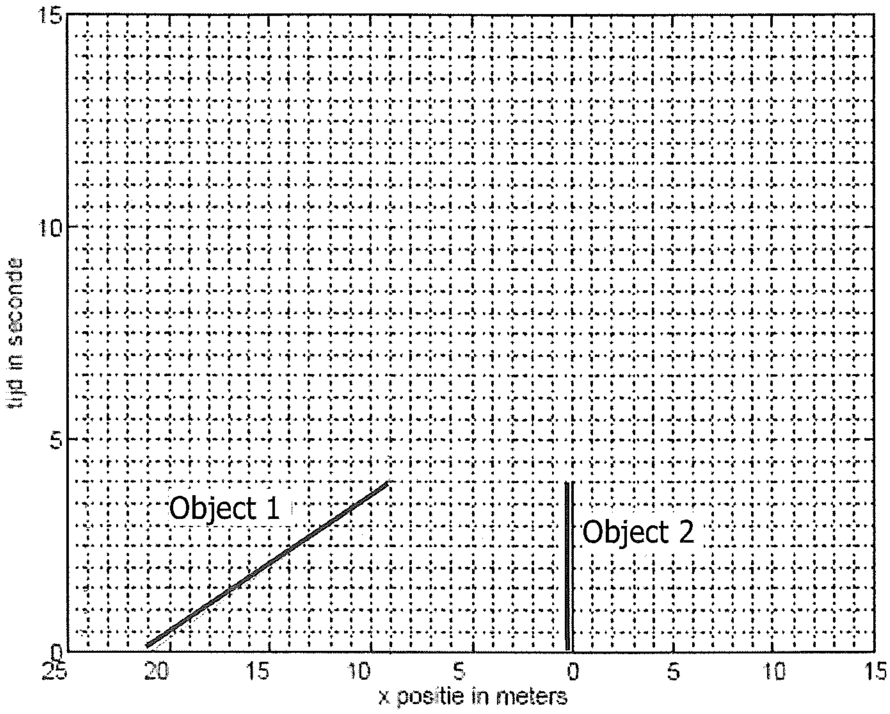
d) Druk de snelheid v_2 in het punt P2 uit in termen van v_1 en andere constanten door gebruik te maken van de wet van behoud van energie.

e) Druk de snelheden v_1 en v_2 uit in de parameters van de baan ε en α , de gravitatieconstante *G* en de massa van de aarde *M*.

(elke deelopgave 6 punten)

Opgave 3

Zie de onderstaande grafiek. Deze grafiek representeert een 1-dimensionale botsing tussen twee objecten. Langs de verticale as staat de tijd t in seconden en langs de horizontale as staat de positie x in meters. In deze grafiek kun je aflezen op welke positie een object zich bevindt als functie van de tijd.



a) Bepaal de snelheden v_1 en v_2 van objecten 1 en 2 in de periode tussen t = 0 en 4 s.
b) Op welk tijdstip t_b botsen de objecten?

Gegeven: Object 1 heeft een massa m_1 van 2 kg. Object 2 heeft een massa m_2 van 4 kg.

c) Teken in grafiek C op bijgaand grafiekenblad een lijn die de beweging van het massamiddelpunt $X_C(t)$ voorstelt tussen $t = 0$ en $t = t_b$ s. Geef ook de snelheid van het massamiddelpunt.

Gegeven: De botsing is volledig elastisch.

d) Bereken de impuls van object 1 en van object 2 na de botsing
e) Teken in grafiek E op bijgaand grafiekenblad twee lijnen die de beweging van de objecten na de botsing voorstellen, en geef de snelheden van beiden. Geef duidelijk aan welke lijn wat is.
f) Stel nu dat de botsing volledig inelastisch zou zijn; teken in grafiek F op bijgaand grafiekenblad de beweging van de objecten, en geef de snelheden.

N.B.: Maak bij ieder onderdeel waar staat "teken" gebruik van berekeningen. Als je onderdeel (a) niet kunt beantwoorden, gebruik dan $v_1 = 2\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ en $v_2 = -4\ \mathrm{m\ s^{-1}}$, d.w.z. dat object 1 in de positieve x-richting beweegt en object 2 in de negatieve x- richting.

(elke deelopgave 5 punten)

Formulelijst bij TN4110TA (Mechanica I).

Deze lijst wordt bij elk tentamen uitgereikt. U dient op de hoogte te zijn van de betekenis van de gebruikte symbolen, alsook van de voorwaarden waaronder de verschillende formules geldig zijn. Triviale formules, zoals de tweede wet van Newton, zijn niet in deze lijst opgenomen.

Poolcoördinaten:

$d\vec{e}_r/dt = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$ en $d\vec{e}_\varphi/dt = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r$

$\vec{a}_{\text{tan}} = \dot{v}\,\vec{e}_{\text{tan}}$; $\vec{a}_{\text{n}} = \frac{v^2}{R}\,\vec{e}_{\text{n}}$

$\vec{v}_{\text{rad}} = \dot{r}\,\vec{e}_r$; $\vec{v}_{\text{tr}} = r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

Ongedempte harm. trilling:

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$, $\omega = \sqrt{b/m}$

$\vec{F}_{\text{grav}} = f(r)\,\vec{e}_r$, $f(r) = (-Gm_1m_2)/r^2$

$F_{\text{w,st}} \leq \mu_{\text{st}}F_{\text{n}}$; $F_{\text{w,k}} = \mu_{\text{k}}F_{\text{n}}$

$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$dE_{\text{k}} = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_{\text{p}}$

$\vec{F} = -\nabla E_{\text{p}} \Rightarrow F_x = -\partial E_{\text{p}}/\partial x$ enz.

$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y = 0$ enz.

$\vec{F} = f(r)\,\vec{e}_r \Leftrightarrow f(r) = -dE_{\text{p}}/dr$

Impulsmoment en krachtmoment:

$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v}$; $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$; $\vec{M} = \dot{\vec{L}}$

Twee deeltjes:

$E_{\text{k}} = E'_{\text{k}} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v_{\text{C}}^2$

$E_{\text{k}} = \frac{1}{2}\mu v_{\text{rel}}^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v_{\text{C}}^2$

$\vec{L}_{\text{C}} = \vec{r}_{12}\times\mu\vec{v}_{\text{rel}}$

N deeltjes:

$E_{\text{k}} = E'_{\text{k}} + \frac{1}{2}mv_{\text{C}}^2$

$\vec{L}_{\text{O}} = \vec{L}_{\text{C}} + \vec{r}_{\text{C}}\times m\vec{v}_{\text{C}}$

Krachtstoot:

$\vec{S} = \int\vec{F}dt = \Delta\vec{p}$