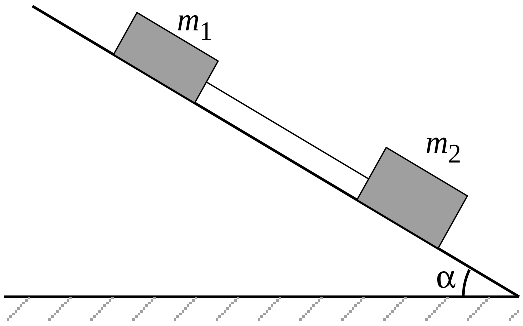
Tentamen Mechanica I (TN4110TA)

3 april 2006 9.00-12.00

- *Het tentamen bestaat uit drie opgaven*
- *Bij elk onderdeel is het aantal te scoren punten vermeld (# p.)*
- *Vermeld op elk blad uw naam en studienummer (7 cijfers)*
- *Het gebruik van syllabus, boeken e.d. is niet toegestaan*

Opgave 1

Twee blokken, met massa $m_1 = 2$ kg en $m_2 = 3$ kg, zijn verbonden door een massaloos, niet-rekbaar touw. Samen glijden ze naar beneden op een helling die een hoek α maakt met het aardoppervlak. Het touw is strak gespannen.
De kinetische wrijvingscoëfficiënt van blok 1 is $\mu_{\mathrm{k1}} = 0,50$ en die van blok 2 is $\mu_{\mathrm{k2}} = 0,40$.



a) *(6 p.)* Maak een duidelijke figuur waarin alle op de twee blokken werkende krachten zijn geschetst.

b) *(6 p.)* Bereken de grootte van de spankracht, F_{s}, uitgedrukt in g en α.

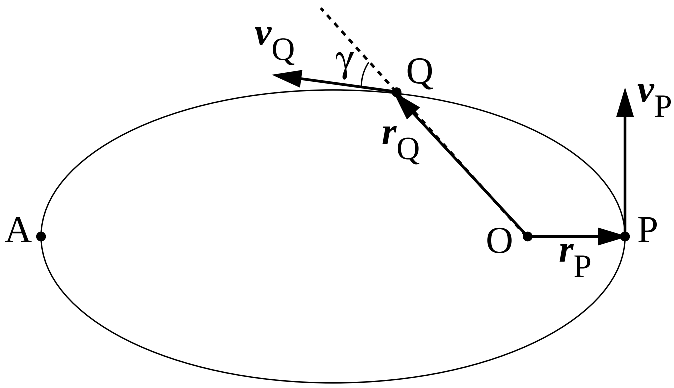
c) *(4 p.)* Bereken de grootte van de versnelling, a, uitgedrukt in g en α, van de twee massa's.

d) *(4 p.)* Er is een grenshoek α_0 waarbij de massa's precies met constante snelheid van de helling af glijden. (Deze snelheid hebben zij b.v. gekregen door de waarde van α van een voldoende grote waarde te verkleinen tot α_0.)
Bereken de waarde van α_0.

Opgave 2

Een komeet (massa m) beweegt zich in het centrale krachtveld van de zon (massa M, $M \gg m$). Het krachtcentrum, het middelpunt van de zon, duiden wij aan met O. Voor de potentiële energie van de komeet in het gravitatieveld van de zon geldt: $E_\mathrm{p} = -c/r$, met $c = GmM$ en G de gravitatieconstante.

De baan is een ellips; in P (perihelium) is de komeet het dichtst bij de zon, met afstand tot O: $r_\mathrm{P} = d$. In A (aphelium) is de afstand tot O het grootst. Voor de snelheid van de komeet in punt P geldt: $v_\mathrm{P} = 1,28\sqrt{c/md}$.



a) *(4 p.)* Welke behoudswetten gelden voor de beweging van de komeet in zijn ellipsvormige baan om de zon? Beargumenteer uw antwoord.

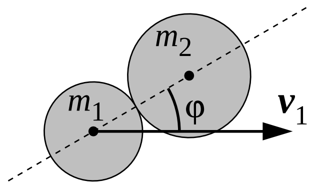
b) *(4 p.)* Enige tijd na het passeren van punt P is de komeet in punt Q waarvoor geldt: $r_\mathrm{Q} = 2r_\mathrm{P} = 2d$. Bewijs dat voor de grootte van de snelheid in Q geldt: $v_\mathrm{Q} = 0,62\ v_\mathrm{P}$ (met de constante in 2 decimalen nauwkeurig).

c) *(4 p.)* De vector $\vec{v}_\mathrm{Q}$ is te ontbinden in een radiale component $\vec{v}_\mathrm{rad}$ (in het verlengde van $\vec{r}_\mathrm{Q}$) en in een transversale component $\vec{v}_\mathrm{tra}$. Bereken de grootte van de transversale component v_tra, uitgedrukt in v_P.

d) *(4 p.)* Bereken γ, de hoek tussen $\vec{r}_\mathrm{Q}$ en $\vec{v}_\mathrm{Q}$.

e) *(4 p.)* Bereken de kromtestraal, ρ, van de baan in punt P, uitgedrukt in d.

Opgave 3
Over een volkomen glad, horizontaal oppervlak glijdt een gladde schijf 1 (massa $m_1 = 2,0$ kg) met snelheid $\vec{v}_1$ (grootte: $v_1 = |\vec{v}_1| = 5,0$ m / s). Op zeker ogenblik botst schijf 1 tegen een in rust verkerende schijf 2 (massa $m_2 = 3,0$ kg). De botsing is volkomen elastisch. Tijdens de botsing maakt de verbindingslijn tussen de middelpunten een hoek $\varphi = 30^\circ$ met de oorspronkelijke bewegingsrichting van schijf 1. Zie onderstaande figuur; getekend is de situatie onmiddellijk vóór de botsing, zoals die er van boven af uitziet. De snelheden na de botsing noemen wij $\vec{u}_1$ en $\vec{u}_2$.



a) *(6 p.)* Beredeneer waarom $\vec{u}_2$ gericht is langs de verbindingslijn van de middelpunten.

b) *(6 p.)* Beredeneer waarom de totale impuls na de botsing gelijk is aan $m_1\vec{v}_1$.

c) *(8 p.)* Bereken de grootte van $\vec{u}_2$.

Formulelijst bij TN4110TA (Mechanica I).

Deze lijst wordt bij elk tentamen uitgereikt. U dient op de hoogte te zijn van de betekenis van de gebruikte symbolen, alsook van de voorwaarden waaronder de verschillende formules geldig zijn. Triviale formules, zoals de tweede wet van Newton, zijn niet in deze lijst opgenomen.

Poolcoördinaten: $d\vec{e}_r/dt = \dot{\varphi}\ \vec{e}_\varphi$ en $d\vec{e}_\varphi/dt = -\dot{\varphi}\ \vec{e}_r$
$\vec{a}_{\mathrm{tan}} = \dot{v}\ \vec{e}_{\mathrm{tan}};\quad \vec{a}_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{R}\ \vec{e}_{\mathrm{n}}$ $\vec{v}_{\mathrm{rad}} = \dot{r}\ \vec{e}_r;\quad \vec{v}_{\mathrm{tr}} = r\dot{\varphi}\ \vec{e}_\varphi$
Ongedempte harm. trilling: $x = A\cos(\omega t + \varphi)\,,\ \omega = \sqrt{b/m}$
$\vec{F}_{\mathrm{grav}} = f(r)\ \vec{e}_r,\quad f(r) = (-Gm_1m_2)/r^2$ $F_{\mathrm{w,st}} \leq \mu_{\mathrm{st}}F_{\mathrm{n}};\quad F_{\mathrm{w,k}} = \mu_{\mathrm{k}}F_{\mathrm{n}}$ $P = \vec{F}\cdot\vec{v}$ $dE_{\mathrm{k}} = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_{\mathrm{p}}$ $\vec{F} = -\nabla E_{\mathrm{p}} \Rightarrow F_x = -\partial E_{\mathrm{p}}/\partial x$ enz. $\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y = 0$ enz. $\vec{F} = f(r)\ \vec{e}_r \Leftrightarrow f(r) = -dE_{\mathrm{p}}/dr$

Impulsmoment en krachtmoment: $\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v};\quad \vec{M} = \vec{r}\times\vec{F};\quad \vec{M} = \dot{\vec{L}}$
Twee deeltjes: $E_{\mathrm{k}} = E'_{\mathrm{k}} + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_{\mathrm{C}}^2$ $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\mu v_{\mathrm{rel}}^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_{\mathrm{C}}^2$ $\vec{L}_{\mathrm{C}} = \vec{r}_{12}\times\mu\vec{v}_{\mathrm{rel}}$
N deeltjes: $E_{\mathrm{k}} = E'_{\mathrm{k}} + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{C}}^2$ $\vec{L}_{\mathrm{O}} = \vec{L}_{\mathrm{C}} + \vec{r}_{\mathrm{C}}\times m\vec{v}_{\mathrm{C}}$
Krachtstoot: $\vec{S} = \int\vec{F}dt = \Delta\vec{p}$