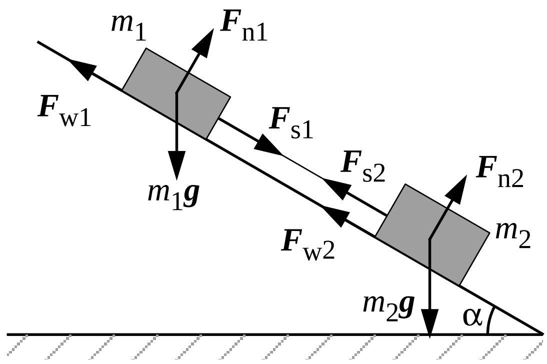
Uitwerking Tentamen Mechanica I (TN4110TA)
3 april 2006

Opgave 1

a) Op beide blokken werkt de zwaartekracht $(m_1\vec{g}$ en $m_2\vec{g})$, de normale kracht $\left(\vec{F}_{\mathrm{n1}}\text{ en }\vec{F}_{\mathrm{n2}}\right)$, de spankracht $\left(\vec{F}_{\mathrm{s1}}\text{ en }\vec{F}_{\mathrm{s2}},\text{ met }\left|\vec{F}_{\mathrm{s1}}\right| = \left|\vec{F}_{\mathrm{s2}}\right| = F_{\mathrm{s}}\right)$ en de wrijvingskracht $\left(\vec{F}_{\mathrm{w1}}\text{ en }\vec{F}_{\mathrm{w2}}\right)$.



b) Voor m_1 geldt loodrecht op het hellend vlak $F_{\mathrm{n1}} = m_1 g\cos\alpha$ en met $F_{\mathrm{w1}} = \mu_{\mathrm{k1}}F_{\mathrm{n1}}$ geldt dan evenwijdig aan het hellend vlak

$$m_1 g\sin\alpha + F_{\mathrm{s1}} - F_{\mathrm{w1}} = m_1 g\sin\alpha + F_{\mathrm{s}} - \mu_{\mathrm{k1}}m_1 g\cos\alpha = m_1 a. \tag{1}$$

Analoog voor m_2 :

$$m_2 g\sin\alpha - F_{\mathrm{s2}} - F_{\mathrm{w2}} = m_2 g\sin\alpha - F_{\mathrm{s}} - \mu_{\mathrm{k2}}m_2 g\cos\alpha = m_2 a. \tag{2}$$

De symbolen F, g en a stellen de absolute waarden van de bijbehorende vectoren voor. Eliminatie van a met $m_2\times(1) - m_1\times(2)$ geeft

$$m_1 m_2 g\sin\alpha + m_2 F_{\mathrm{s}} - \mu_{\mathrm{k1}}m_1 m_2 g\cos\alpha = m_1 m_2 g\sin\alpha - m_1 F_{\mathrm{s}} - \mu_{\mathrm{k2}}m_1 m_2 g\cos\alpha \;\Rightarrow$$

$$(m_1+m_2)\,F_{\mathrm{s}} = (\mu_{\mathrm{k1}} - \mu_{\mathrm{k2}})\,m_1 m_2 g\cos\alpha \;\Rightarrow$$

$$F_{\mathrm{s}} = (\mu_{\mathrm{k1}} - \mu_{\mathrm{k2}})\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}g\cos\alpha = 0,1\times\frac{6}{5}g\cos\alpha = 0,12\times g\cos\alpha. \tag{3}$$

c) Substitutie van (3) in (1) geeft

$$\begin{aligned}a &= g\sin\alpha + \frac{F_{\mathrm{s}}}{m_1} - \mu_{\mathrm{k1}}g\cos\alpha = g\sin\alpha + (\mu_{\mathrm{k1}} - \mu_{\mathrm{k2}})\frac{m_2}{(m_1+m_2)}g\cos\alpha - \mu_{\mathrm{k1}}g\cos\alpha\\ &= g\left\{\sin\alpha + \left(0,1\times\frac{3}{5} - 0,5\right)\cos\alpha\right\}\\ &= g\left\{\sin\alpha - 0,44\times\cos\alpha\right\}.\end{aligned}$$

d) Constante snelheid naar grootte en richting betekent versnelling nul:

$$a = 0 \;\Rightarrow\; \sin\alpha = 0,44\times\cos\alpha \;\Rightarrow\; \tan\alpha = 0,44 \;\Rightarrow\; \alpha = 23,7^\circ = 0,41\,\mathrm{rad}\,.$$

Opgave 2

a) BW1: behoud van energie. Een centraal krachtveld is een conserverend krachtveld dus behoud van energie.
BW2: geen behoud van impuls. Op de komeet werkt een uitwendige kracht dus is de impuls niet constant.
BW3: behoud van impulsmoment. In een centraal krachtveld is het krachtmoment t.o.v. het krachtcentrum gelijk nul. Dus is het impulsmoment t.o.v. het krachtcentrum constant.

b) Behoud van energie betekent $E_{\mathrm{Q}} = E_{\mathrm{P}}$:

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{Q}}^2 - \frac{c}{2d} = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{P}}^2 - \frac{c}{d} \Rightarrow$$

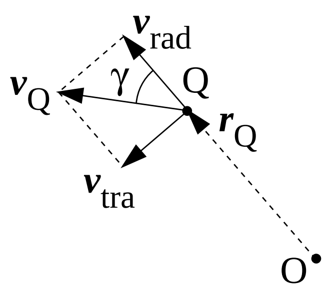
$$v_{\mathrm{Q}} = \sqrt{v_{\mathrm{P}}^2 - \frac{c}{md}} = v_{\mathrm{P}}\sqrt{1 - \frac{1}{1,28^2}} = 0,624v_{\mathrm{P}} = 0,62\ v_{\mathrm{P}}.$$

c) Behoud van impulsmoment betekent $\vec{L}_{\mathrm{O}}(\mathrm{P}) = \vec{L}_{\mathrm{O}}(\mathrm{Q})$, dus ook $L_{\mathrm{O}}(\mathrm{P}) = L_{\mathrm{O}}(\mathrm{Q})$:

$$|\vec{r}_{\mathrm{P}} \times m\vec{v}_{\mathrm{P}}| = |\vec{r}_{\mathrm{Q}} \times m\vec{v}_{\mathrm{Q}}| \Rightarrow d\ mv_{\mathrm{P}} = 2d\ mv_{\mathrm{tra}} \Rightarrow v_{\mathrm{tra}} = \frac{1}{2}v_{\mathrm{P}}.$$

d)

$$\sin\gamma = \frac{v_{\mathrm{tra}}}{v_{\mathrm{Q}}} = \frac{0.50}{0.62} = 0.80 \Rightarrow \gamma = 0,93\ \text{rad} = 53\,^\circ.$$



e) De grootte van de kracht in een centraal krachtveld is gegeven door de scalaire functie $f(r)$. Wij kunnen deze berekenen uit de potentiële energie

$$f(r) = -\frac{dE_{\mathrm{p}}}{dr} = -\frac{c}{r^2}.$$

Dus uit de grootte van de centripetale kracht en de centripetale versnelling in punt P volgt de kromtestraal ρ :

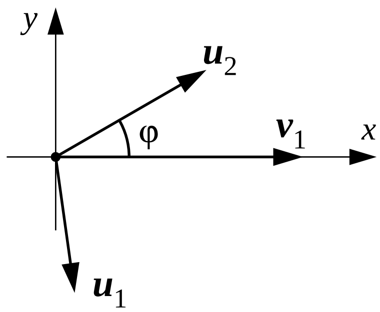
$$\frac{c}{d^2} = ma_{\mathrm{n}}, \quad a_{\mathrm{n}} = \frac{v_{\mathrm{P}}^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v_{\mathrm{P}}^2}{a_{\mathrm{n}}} = v_{\mathrm{P}}^2\frac{md^2}{c} = 1,28^2 d = 1,64\ d.$$

Opgave 3

a) Impuls kan alleen worden overgedragen van schijf 1 naar schijf 2 evenwijdig aan de verbindingslijn van de middelpunten. Voor impulsoverdracht (=krachtstoot) in een richting loodrecht hierop zouden er tijdens de botsing krachten moeten werken in die loodrechte richting. Dat zouden dan wrijvingskrachten moeten zijn, tussen de zij-oppervlakken van de schijven, en dat is in strijd met het gegeven van een volkomen elastische botsing.

b) *Wet van behoud van impuls* : De totale impuls is constant als de som van alle uitwendige krachten $\vec{0}$ is. Er zijn geen uitwendige krachten in het xy-vlak; wel loodrecht hierop maar dat zijn de zwaartekracht en de normale kracht en die heffen elkaar op.

Wij kiezen de richting van $\vec{v}_1$ als x-as, zie figuur hieronder.



c) Behoud van impuls:

$$\vec{p}_{\mathrm{voor}} = \vec{p}_{\mathrm{na}} \;\Rightarrow\; m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \;\Rightarrow\; 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 = 10\,\vec{\imath}.$$

Voor x- en y-richting:

$$\Rightarrow\; 2u_{1\mathrm{x}} + 3u_{2\mathrm{x}} = 10 \tag{4}$$

$$2u_{1\mathrm{y}} + 3u_{2\mathrm{y}} = 0. \tag{5}$$

Maar de oriëntatie van $\vec{u}_2$ is bekend:

$$u_{2\mathrm{x}} = u_2\cos 30\,^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}\;u_2, \quad u_{2\mathrm{y}} = u_2\sin 30\,^\circ = \frac{1}{2}\;u_2,$$

substitutie in (4) en (5) geeft

$$2u_{1\mathrm{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\;u_2 = 10 \;\Rightarrow\; u_{1\mathrm{x}} = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{3}\;u_2, \tag{6}$$

$$2u_{1\mathrm{y}} + \frac{3}{2}\;u_2 = 0 \;\Rightarrow\; u_{1\mathrm{y}} = -\frac{3}{4}\;u_2. \tag{7}$$

Behoud van energie:

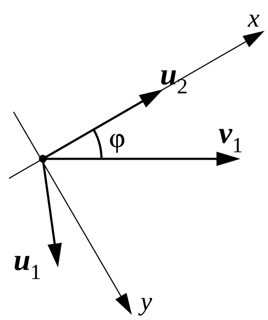
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \;\Rightarrow\; 2u_1^2 + 3u_2^2 = 2v_1^2 \;\Rightarrow$$

$$2\left(u_{1x}^2 + u_{1y}^2\right) + 3u_2^2 = 50. \tag{8}$$

Substitutie van (6) en (7) geeft, behalve de oplossing $u_2 = 0$ (geen botsing),

$$u_2 = 2\sqrt{3} = 3,5 \ \ \mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}\,.$$

Alternatief:
Het probleem wordt wat eenvoudiger als we een as (b.v. de x-as) langs de richting van $\vec{u}_2$ kiezen; zie ook opgave 6.10, alleen doen we de oplossing nu niet in het massamiddelpuntstelsel.
Het voordeel is dat de "botsing"zich nu alleen afspeelt in de x-richting: de snelheid van schijf 1 in de y-richting verandert niet. Het gevolg is dat behoud van energie in x- en y-richting afzonderlijk geldt.



Behoud van impuls:

$$\vec{p}_{\mathrm{voor}} = \vec{p}_{\mathrm{na}} \ \Rightarrow \ m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

Voor x-richting:

$$\Rightarrow \ m_1 v_{1\mathrm{x}} = m_1 u_{1\mathrm{x}} + m_2 u_{2\mathrm{x}} = m_1 u_{1\mathrm{x}} + m_2 u_2$$
$$\Rightarrow \ m_1\left(v_{1\mathrm{x}} - u_{1\mathrm{x}}\right) = m_2 u_2 \tag{9}$$

en y-richting:

$$\Rightarrow \ m_1 v_{1\mathrm{y}} = m_1 u_{1\mathrm{y}} \ \Rightarrow \ v_{1\mathrm{y}} = u_{1\mathrm{y}}.$$

Behoud van energie:

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 \ \Rightarrow \ m_1\left(v_{1\mathrm{x}}^2 + v_{1\mathrm{y}}^2\right) = m_1\left(u_{1\mathrm{x}}^2 + u_{1\mathrm{y}}^2\right) + m_2 u_2^2.$$

Met $v_{1\mathrm{y}} = u_{1\mathrm{y}}$ geeft dit

$$m_1\left(v_{1\mathrm{x}}^2 - u_{1\mathrm{x}}^2\right) = m_2 u_2^2 \tag{10}$$

en uiteraard $m_1 v_{1\mathrm{y}}^2 = m_1 u_{1\mathrm{y}}^2$. Deling van (10) en (9) geeft

$$v_{1\mathrm{x}} + u_{1\mathrm{x}} = u_2. \tag{11}$$

$m_1 * (11) + (9)$ geeft

$$2m_1 v_{1\mathrm{x}} = (m_1 + m_2)\,u_2.$$

Met $v_{1\mathrm{x}} = v_1\cos\varphi = 5 \times \frac{1}{2}\sqrt{3}$:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1\mathrm{x}} = 2\sqrt{3} = 3,5 \ \ \mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}\,.$$