Tentamen Mechanica I (TN4110TA)

4 april 2005 9.00-12.00

- *Het tentamen bestaat uit drie opgaven*
- *Bij elk onderdeel is het aantal te scoren punten vermeld (# p.)*
- *Vermeld op elk blad uw naam en studienummer (7 cijfers)*
- *Het gebruik van syllabus, boeken e.d. is niet toegestaan*

Opgave 1

Een automobilist remt voor een stoplicht met een constante vertraging $|a_0| = 4$ $[\mathrm{m\,s^{-2}}]$. De richting waarin hij zich voortbeweegt noemen wij de positieve X-richting. Op een bepaald tijdstip $t = t_0 = 0$, als hij nog een snelheid heeft van $|v_0| = 14$ $[\mathrm{m\,s^{-1}}]$, beseft hij dat hij zo niet voor het stoplicht tot stilstand komt. Vanaf tijdtip t_0, zijn positie noemen wij dan x_0, vergroot hij zijn vertraging met een constant bedrag per tijdseenheid: $|\dot{a}| = \left|\frac{da}{dt}\right|$.
Na twee seconden staat de auto stil.

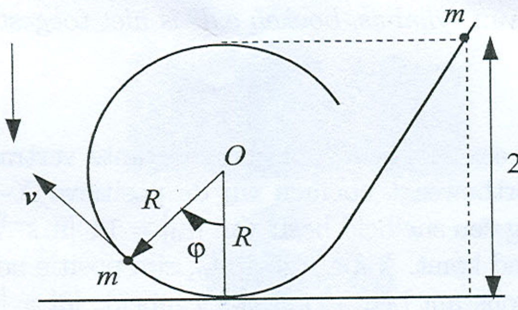
a) *(5 p.)* Leidt een algemene formule af voor de positie $x(t)$, van de automobilist, uitgedrukt in de parameters x_0, v_0, a_0 en $\dot{a}$.
Geef van elk van de parameters v_0, a_0 en $\dot{a}$ aan of deze positief of negatief is.

b) *(5 p.)* Bereken de waarde van $\dot{a}$; geef ook het teken en de eenheid.

c) *(5 p.)* Hoe groot is de versnelling op het ogenblik dat de auto tot stilstand komt?

d) *(5 p.)* Op tijdstip t_0 was de afstand tot het stoplicht 15 $[\mathrm{m}]$. Is het de automobilist gelukt om voor het stoplicht tot stilstand te komen?

Opgave 2
Een gladde, cirkelvormige, aan de binnenzijde open goot (straal R) is in een verticaal vlak opgesteld. Een puntmassa m glijdt omlaag langs een hellend vlak dat aansluit op de goot (zie fig.). De puntmassa wordt zonder beginsnelheid losgelaten op een hoogte $2R$ boven de grond. We verwaarlozen wrijving.



a) *(7 p.)* Bereken de grootte van de snelheid $\vec{v}$ van de puntmassa als functie van hoek φ, met parameters straal R en versnelling van de zwaartekracht g. Hoek φ is de hoek van de voerstraal vanuit het middelpunt O naar de goot met de naar beneden gerichte verticaal.

b) *(7 p.)* Bewijs dat voor de grootte van de normale kracht F_n, uitgeoefend door de goot op de puntmassa, geldt:
$$F_\mathrm{n} = 2mg + 3mg\cos\varphi.$$

c) *(6 p.)* Bereken bij welke waarde van φ $\left(\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right)$ de puntmassa het contact met de goot verliest.

Opgave 3
Een puntmassa, $m = 1$ [kg], beweegt in een krachtveld in een plat vlak (het XY-vlak). Voor de veldkracht geldt:
$$F_x = -ax^by^2,\ F_y = -x^4y + 1,\ F_z = 0,$$
met a en b nader te bepalen constanten.

a) *(7 p.)* Bereken a en b, als gegeven is dat het krachtveld een *conserverend* veld is.

b) *(7 p.)* Bereken de potentiële energie E_p van de puntmassa als functie van de coördinaten x en y, als wij het nulpunt van E_p in de oorsprong O van het coördinatenstelsel kiezen: $E_\mathrm{p}(0,0,0) = 0$.

c) *(6 p.)* Men plaatst de puntmassa in O en geeft hem een beginsnelheid $\vec{v}_0$, zodanig dat de puntmassa na enige tijd het punt $P(2,4,0)$ passeert. Bereken de minimale waarde van v_0 zodat de gebeurtenis inderdaad kan plaats vinden.

Formulelijst bij TN4110TA (Mechanica I).

Deze lijst wordt bij elk tentamen uitgereikt. U dient op de hoogte te zijn van de betekenis van de gebruikte symbolen, alsook van de voorwaarden waaronder de verschillende formules geldig zijn. Triviale formules, zoals de tweede wet van Newton, zijn niet in deze lijst opgenomen.

Poolcoördinaten:

$d\vec{e}_r/dt = \dot{\varphi}\ \vec{e}_\varphi$ en $d\vec{e}_\varphi/dt = -\dot{\varphi}\ \vec{e}_r$

$\vec{a}_{\mathrm{tan}} = \dot{v}\ \vec{e}_{\mathrm{tan}};\quad \vec{a}_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{R}\ \vec{e}_{\mathrm{n}}$

$\vec{v}_{\mathrm{rad}} = \dot{r}\ \vec{e}_r;\quad \vec{v}_{\mathrm{tr}} = r\dot{\varphi}\ \vec{e}_\varphi$

Ongedempte harm. trilling:

$x = A\cos(\omega t + \varphi)\,,\ \omega = \sqrt{b/m}$

$\vec{F}_{\mathrm{grav}} = f(r)\ \vec{e}_r,\quad f(r) = (-Gm_1m_2)/r^2$

$F_{\mathrm{w,st}} \le \mu_{\mathrm{st}}F_{\mathrm{n}};\quad F_{\mathrm{w,k}} = \mu_{\mathrm{k}}F_{\mathrm{n}}$

$P = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$dE_{\mathrm{k}} = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_{\mathrm{p}}$

$\vec{F} = -\nabla E_{\mathrm{p}} \Rightarrow F_x = -\partial E_{\mathrm{p}}/\partial x$ enz.

$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y = 0$ enz.

$\vec{F} = f(r)\ \vec{e}_r \Leftrightarrow f(r) = -dE_p/dr$

Impuls- en krachtmoment:

$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{v};\quad \vec{M} = \vec{r}\times\vec{F};\quad \vec{M} = \dot{\vec{L}}$

Twee deeltjes:

$E_{\mathrm{k}} = E'_{\mathrm{k}} + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_{\mathrm{C}}^2$

$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\mu v_{\mathrm{rel}}^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_{\mathrm{C}}^2$

$\vec{L}_{\mathrm{C}} = \vec{r}_{12}\times\mu\vec{v}_{\mathrm{rel}}$

N deeltjes:

$E_{\mathrm{k}} = E'_{\mathrm{k}} + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{C}}^2$

$\vec{L}_{\mathrm{O}} = \vec{L}_{\mathrm{C}} + \vec{r}_{\mathrm{C}}\times m\vec{v}_{\mathrm{C}}$

Krachtstoot:

$\vec{S} = \int\vec{F}dt = \Delta\vec{p}$

Uitwerking Tentamen Mechanica I (TN4110TA)
4 april 2005

Opgave 1

a)

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \dot{a}, \text{ met } \dot{a} \text{ constant.}$$

Integratie en randvoorwaarde $a(t=0) = a_0$ geeft

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a(t) = \dot{a}t + C_1 \;\Rightarrow\; \frac{d^2x}{dt^2} = a_0 + \dot{a}t.$$

Integratie en randvoorwaarde $v(t=0) = v_0$ geeft

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = a_0 t + \frac{1}{2}\dot{a}t^2 + C_2 \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = v_0 + a_0 t + \frac{1}{2}\dot{a}t^2. \tag{1}$$

Integratie en randvoorwaarde $x(t=0) = x_0$ geeft

$$x = x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2 + \frac{1}{6}\dot{a}t^3 + C_3 \;\Rightarrow\; x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2 + \frac{1}{6}\dot{a}t^3, \tag{2}$$

met

$$v_0 > 0,\; a_0 < 0,\; \dot{a} < 0. \tag{3}$$

b) Met (1) in de vorm

$$v(t) = v_0 - |a_0|\,t - \frac{1}{2}|\dot{a}|\,t^2 \tag{4}$$

en substitutie van $v(t = 2 \text{ [s]}) = 0$, v_0 en $|a_0|$, geeft

$$0 = 14 - 4 * 2 - \frac{1}{2} * |\dot{a}| * 4 \;\Rightarrow\; |\dot{a}| = 3 \;\Rightarrow\; \dot{a} = -3 \;\left[\mathrm{m\,s^{-3}}\right].$$

c) Differentiatie van (4) naar de tijd geeft voor $t = 2$

$$a(t=2) = -|a_0| - |\dot{a}|\,t = -4 - 3 * 2 = -10 \;\left[\mathrm{m\,s^{-2}}\right].$$

d) Met (2) in de vorm

$$x(t) - x_0 = v_0 t - \frac{1}{2}|a_0|\,t^2 - \frac{1}{6}|\dot{a}|\,t^3$$

vinden wij voor $t = 2$

$$x(t=2) - x_0 = 14 * 2 - \frac{1}{2} * 4 * 4 - \frac{1}{6} * 3 * 8 = 16 \text{ [m]} > 15 \text{ [m]};$$

het is dus niet gelukt.

Opgave 2

a) Met het hoogteverschil h tussen startpunt en een punt in de goot vinden wij achtereenvolgens

$$h = R + R\cos\varphi \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}mv^2 = mg\left(R + R\cos\varphi\right) \;\Rightarrow\; v = \sqrt{2gR\left(1+\cos\varphi\right)}.$$

b)

$$\vec{F}_\mathrm{n} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Deze vectorvergelijking kan men schrijven in normale en tangentiele componenten. Voor de normale richting vinden wij

$$F_\mathrm{n} - mg\cos\varphi = ma_\mathrm{n} = m\frac{v^2}{R}.$$

Door substitutie van de uitdrukking voor v onder **a**) vinden wij het gevraagde resultaat:

$$F_\mathrm{n} - mg\cos\varphi = 2mg\left(1+\cos\varphi\right) \;\Rightarrow\; F_\mathrm{n} = 2mg + 3mg\cos\varphi.$$

c) Als de puntmassa het contact met de goot verliest, dan zal de normale kracht F_n die de goot op de puntmassa uitoefent juist nul worden:

$$2 + 3\cos\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \text{ of } \varphi = 2\pi - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right).$$

Met de voorwaarde $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ geeft dit

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = 2,3 \;\; [\mathrm{rad}] = 132^\circ.$$

Opgave 3

a)

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \;\Rightarrow\; -2ax^by^2 = -4x^3y \;\Rightarrow\; a = 2 \text{ en } b = 3.$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0 \text{ en } \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0 - 0 = 0.$$

b)

$$\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial x} = -F_x = ax^by^2 = 2x^3y^2 \;\Rightarrow\; E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}x^4y^2 + f\left(y\right)$$

en

$$\frac{\partial E_\mathrm{p}}{\partial y} = -F_y = x^4y - 1 \;\Rightarrow\; E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}x^4y^2 - y + g\left(x\right)$$

geeft met $E_\mathrm{p}\left(x=0, y=0\right) = 0$

$$E_\mathrm{p}\left(x,y\right) = \frac{1}{2}x^4y^2 - y + C = \frac{1}{2}x^4y^2 - y.$$

c) Wet van behoud van mechanische energie

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + E_{\mathrm{p}}\left(0,0\right) = \frac{1}{2}mv_P^2 + E_{\mathrm{p}}\left(2,4\right) \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 = \frac{1}{2}v_P^2 + \frac{1}{2} * 256 - 4 = \frac{1}{2}v_P^2 + 124.$$

Voor $v_P \geq 0$ vinden wij $v_0 \geq \sqrt{248} = 15,75\ \ [\mathrm{m\,s^{-1}}]$.