Tentamen
Datum: 22-03-2004

TN4110TU: Mechanica voor Technische Aardwetenschappen

L.R. van den Doel

L.R.vandenDoel@tnw.tudelft.nl

Delft University of Technology

Pattern Recognition Group
Department Imaging Science & Technology
Faculty of Applied Sciences
Delft University of Technology
Lorentzweg 1, 2628 CJ Delft, The Netherlands

Opgave 1

Een object met massa m kan bewegen in een horizontaal vlak. De plaatsvector van dit object wordt gegeven door de volgende uitdrukking:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos\phi(t), \\ y(t) = \rho(t)\sin\phi(t), \end{cases} \tag{1}$$

waarin de functies $\rho(t)$ en $\phi(t)$ gegeven worden door:

$$\rho(t) = R_0 + \alpha t, \quad \phi(t) = \omega_0 t, \tag{2}$$

waarin $\alpha > 0$ een constante is en $\omega_0 > 0$ een constante hoeksnelheid voorstelt. In deze opgave wordt gevraagd om een aantal fysische grootheden uit te rekenen, die te maken hebben met deze beweging. Je zult daarvoor een aantal keren moeten differentiëren om tot het goede antwoord te komen. Je kunt deze opgave aanzienlijk vereenvoudigen door, in eerste instantie, de waarde van α gelijk aan 0 te stellen, zodat $r(t)$ niet langer een functie is van de tijd, maar een constante wordt: $r = R_0$.

a) **(1 punten)** Beschrijf in woorden wat voor soort beweging dit object uitvoert.
b) **(1 punten)** Wat is de eenheid van de constante α?
c) **(3 punten)** Bereken de x- en y-component van de snelheidsvector $\mathbf{v}(t)$.
d) **(3 punten)** Bereken de x- en y-component van de versnellingsvector $\mathbf{a}(t)$.
e) **(3 punten)** Toon aan dat de componenten van de kracht $\mathbf{F}(t)$, die het object ondervindt, gegeven worden door:

$$\begin{cases} F_x(t) = -\frac{2m\alpha\omega_0 y(t)}{\rho(t)} - m\omega_0^2 x(t). \\ F_y(t) = \frac{2m\alpha\omega_0 x(t)}{\rho(t)} - m\omega_0^2 y(t). \end{cases} \tag{3}$$

f) **(3 punten)** Bereken het krachtmoment $\mathbf{M}_0$ ten opzichte van de oorsprong ($x = 0, y = 0$). In welke richting wijst het krachtmoment $\mathbf{M}_0$?
g) **(3 punten)** Bereken het impulsmoment $\mathbf{L}_0$ ten opzichte van de oorsprong ($x = 0, y = 0$). In welke richting wijst het impulsmoment $\mathbf{L}_0$?
h) **(3 punten)** Is de energie van het object constant in deze opgave. Verklaar je antwoord.

Opgave 2

Curling is een sport waarbij wrijving een belangrijke rol speelt: door de onderliggende ijslaag te schrobben met een borstel wordt plaatselijk de wrijvingscoëfficiënt veranderd en als gevolg daarvan zal de curling steen afgeremd worden. In deze opgave zullen we aannemen dat professionele curling spelers een ijsbaan hebben geprepareerd, die begint op $x = 0$ en een lengte heeft van L meter, zodanig dat de wijvingscoëfficiënt gemodelleerd kan worden door de volgende uitdrukking:

$$\mu(x) = \mu_0 \left[1 - \frac{4}{L^2}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2\right]. \tag{4}$$

a) **(2 punten)** Bepaal de mogelijke waarden van de wrijvingscoëfficiënt μ_0, dat wil zeggen: bepaal de minimale waarde (μ_{min}) en de maximale waarde (μ_{max}) van μ, zodat $\mu_{min} < \mu < \mu_{max}$.

b) **(2 punten)** Een curling steen met massa m glijdt over de ijsbaan en passeert het punt $x = 0$ met een snelheid v_0. De wrijvingskracht zal de curling steen afremmen. Waar is de absolute waarde van de versnelling (de versnelling is overal negatief) het grootst, en waar het kleinst?

c) **(5 punten)** Deze curling steen glijdt over onze goed geprepareerde ijsbaan. Bereken de hoeveelheid arbeid W, die door de wrijvingskracht wordt verricht, wanneer de curling steen van begin tot eind over de ijsbaan glijdt.

d) **(3 punten)** De truuk in curling is om de steen precies aan het einde van de ijsbaan tot stilstand te laten komen. Leidt een uitdrukking af voor de beginsnelheid v_0, die de curling steen op $x = 0$ moet hebben, om op $x = L$ tot rust te komen gegeven de bovengenoemde wrijvingskracht.

Opgave 3

Een object met massa m_1, dat met een snelheid $u_1 = u$ beweegt, botst op een object met massa m_2, dat stilstaat ($u_2 = 0$). De botsing tussen object 1 en object 2 kan *elastisch* zijn, hetgeen betekent dat zowel de energie, als de totale impuls constant blijft. De botsing kan daarentegen ook *inelastisch* zijn, als een deel van de energie E verloren gaat tijdens de botsing. Laten we deze twee mogelijkheden als volgt beschrijven: de energie voor de botsing, noemen we E_a en de energie na de botsing noemen we E_b. De energie na de botsing (E_b) is een fractie f van de energie voor de botsing (E_a): $E_b = f\,E_a$. Verder noemen we de verhouding van de massa's $r = \frac{m_1}{m_2}$.

a) **(2 punten)** Leg uit dat de impuls niet alleen bij een *elastische* botsing constant blijft, maar ook bij een *inelastische* botsing.

b) **(3 punten)** Leidt twee uitdrukkingen af, één voor de impuls: $P_a = P_b$, en één voor de energie: $fE_a = E_b$ in termen van de massa verhouding r, de energie fractie f, de snelheid van object 1 vóór de botsing u, en de snelheden van de twee objecten na de botsing v_1 en v_2.

c) **(4 punten)** Bewijs dat de volgende relatie geldt tussen de energie fractie f en de massa verhouding r:

$$f \geq \frac{r}{1+r}. \tag{5}$$

d) **(4 punten)** Bereken de snelheden van de twee objecten na de botsing (v_1 en v_2) als $r = \frac{1}{2}$ en $f = \frac{1}{2}$.

Formulelijst

Deze lijst wordt bij elk tentamen uitgereikt. U dient op de hoogte te zijn van de betekenis van de gebruikte symbolen, alsook van de voorwaarden waaronder de verschillende formules geldig zijn. Triviale formules, zoals de tweede wet van Newton, zijn niet in deze lijst opgenomen.

Poolcoördinaten:

$d\mathbf{e}_r/dt = \dot{\varphi}\ \mathbf{e}_\varphi$ en $d\mathbf{e}_\varphi/dt = -\dot{\varphi}\ \mathbf{e}_r$

Eén deeltje:

$\mathbf{a}_{\tan} = \dot{v}\ \mathbf{e}_{\tan};\quad \mathbf{a}_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{R}\ \mathbf{e}_{\mathrm{n}}$

$\mathbf{v}_{\mathrm{rad}} = \dot{r}\ \mathbf{e}_r;\quad \mathbf{v}_{\mathrm{tr}} = r\dot{\varphi}\ \mathbf{e}_\varphi$

Ongedempte harm. trilling: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{b}}$

$x = A\cos(\omega t + \varphi),\ \omega = \sqrt{b/m}$

$\mathbf{F}_{\mathrm{grav}} = f(r)\ \mathbf{e}_r,\quad f(r) = (-Gm_1m_2)/r^2$

$F_{\mathrm{w,st}} \le \mu_{\mathrm{st}}F_{\mathrm{n}};\quad F_{\mathrm{w,k}} = \mu_{\mathrm{k}}F_{\mathrm{n}}$

$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$

$dE_{\mathrm{k}} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -dE_{\mathrm{p}}$

$\mathbf{F} = -\nabla E_{\mathrm{p}} \Rightarrow F_x = -\partial E_{\mathrm{p}}/\partial x$ enz.

$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y = 0$ enz.

$\mathbf{F} = f(r)\ \mathbf{e}_r \Leftrightarrow f(r) = -dE_p/dr$

Impuls- en krachtmoment:

$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times m\mathbf{v};\quad \mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F};\quad \mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$

Twee deeltjes:

$E_{\mathrm{k}} = E'_{\mathrm{k}} + \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{\mathrm{C}}^2$

$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\mu v_{\mathrm{rel}}^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{\mathrm{C}}^2$

$\mathbf{L}_{\mathrm{C}} = \mathbf{r}_{12}\times\mu\mathbf{v}_{\mathrm{rel}}$

N deeltjes:

$E_{\mathrm{k}} = E'_{\mathrm{k}} + \frac{1}{2}mv_{\mathrm{C}}^2$

$\mathbf{L}_{\mathrm{O}} = \mathbf{L}_{\mathrm{C}} + \mathbf{r}_{\mathrm{C}}\times m\mathbf{v}_{\mathrm{C}}$

Tentamen
Datum: 22-03-2004

TN4110TU: Mechanica voor Technische Aardwetenschappen - Uitwerkingen

L.R. van den Doel

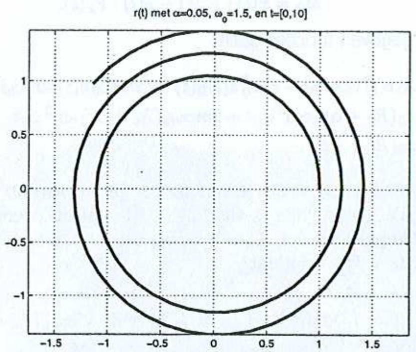
L.R.vandenDoel@tnw.tudelft.nl

TU Delft
Delft University of Technology

Pattern Recognition Group
Department Imaging Science & Technology
Faculty of Applied Sciences
Delft University of Technology
Lorentzweg 1, 2628 CJ Delft, The Netherlands

Opgave 1

a) Als de functie $\rho(t)$ constant is als functie van de tijd, dan beschrijft de functie $\mathbf{r}(t)$ een cirkelbeweging met constante hoeksnelheid, immers $\omega = \frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_0\hat{k}$. In deze opgave neemt de straal toe ($\alpha > 0$) als functie van de tijd. In beide gevallen beschrijft de functie $\mathbf{r}(t)$ dan een spiraal beweging.



b) De eenheid van de functie $\mathbf{r}(t)$ is meter. De eenheid van de tijd t is seconde, dus de eenheid van α moet meter per seconde zijn. Met andere woorden α is de snelheid waarmee de straal van de spiraal toeneemt.

c) De afgeleide van $\rho(t)$ is $\frac{d\rho(t)}{dt} = \alpha$ en de afgeleide van $\phi(t)$ is $\frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_0$. De afgeleide van $x(t)$ en $y(t)$ zijn:

$$\begin{cases} v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\rho(t)}{dt} cos\phi(t) - \rho(t)\frac{d\phi(t)}{dt}\sin\phi(t) = \alpha\cos\omega_0 t - (R_0+\alpha t)\omega_0\sin\omega_0 t. \\ v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d\rho(t)}{dt} sin\phi(t) + \rho(t)\frac{d\phi(t)}{dt}\cos\phi(t) = \alpha\sin\omega_0 t + (R_0+\alpha t)\omega_0\cos\omega_0 t. \end{cases} \tag{1}$$

d) De afgeleide van $v_x(t)$ en $v_y(t)$ zijn:

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -2\alpha\omega_0\sin\omega_0 t - (R_0+\alpha t)\omega_0^2\cos\omega_0 t. \\ a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = 2\alpha\omega_0\cos\omega_0 t - (R_0+\alpha t)\omega_0^2\sin\omega_0 t. \end{cases} \tag{2}$$

e) De componenten van de kracht volgen nu als:

$$\begin{cases} F_x(t) = ma_x(t) = -2m\alpha\omega_0\sin\omega_0 t - m(R_0+\alpha t)\omega_0^2\cos\omega_0 t. \\ F_y(t) = ma_y(t) = 2m\alpha\omega_0\cos\omega_0 t - m(R_0+\alpha t)\omega_0^2\sin\omega_0 t. \end{cases} \tag{3}$$

Gegeven de definities voor $x(t)$ en $y(t)$ kunnen de componenten van de krachten herschreven worden als:

$$\begin{cases} F_x(t) = -\frac{2m\alpha\omega_0 y(t)}{\rho(t)} - m\omega_0^2 x(t). \\ F_y(t) = \frac{2m\alpha\omega_0 x(t)}{\rho(t)} - m\omega_0^2 y(t). \end{cases} \tag{4}$$

f) Het krachtmoment $\mathbf{M}_0$ ten opzichte van de oorsprong volgt uit $\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$:

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} y(t)\cdot F_z(t) - z(t)\cdot F_y(t) \\ z(t)\cdot F_x(t) - x(t)\cdot F_z(t) \\ x(t)\cdot F_y(t) - y(t)\cdot F_x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t)\cdot 0 & - & 0\cdot F_y(t) \\ 0\cdot F_x(t) & - & x(t)\cdot 0 \\ x(t)\cdot F_y(t) & - & y(t)\cdot F_x(t) \end{pmatrix} = M_0\hat{k}, \quad (5)$$

waarin

$$M_0 = x(t)\cdot F_y(t) - y(t)\cdot F_x(t). \quad (6)$$

Invullen van de gegeven functies geeft:

$$\begin{aligned} M_0 &= 2m\alpha\omega_0 x(t)\cos\omega_0 t - m\omega_0^2 x(t)y(t) + 2m\alpha\omega_0 y(t)\sin\omega_0 t + m\omega_0^2 x(t)y(t) \quad (7)\\ &= 2m\alpha\omega_0(R_0+\alpha t)\cos^2\omega_0 t + 2m\alpha\omega_0(R_0+\alpha t)\sin^2\omega_0 t \quad (8)\\ &= 2m\alpha\omega_0(R_0+\alpha t). \quad (9)\end{aligned}$$

g) Het impulsmoment $\mathbf{L}_0$ ten opzichte van de oorsprong kan op twee manieren berekend worden. De ene manier is via $\mathbf{M}_0 = \frac{d\mathbf{L}_0}{dt}$, en de tweede manier is via de definitie van het impulsmoment: $\mathbf{L}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. Zie voor de tweede manier de vorige uitwerking. Uit $\mathbf{M}_0 = \frac{d\mathbf{L}_0}{dt}$ volgt dat

$$\mathbf{L}_0(t) = \int \mathbf{M}_0(t)dt \to L_0 = \int M_0(t)dt = m\omega_0(R_0+\alpha t)^2. \quad (10)$$

De integratie constante is nul in dit geval. De x en y component van het impulsmoment zijn ook nul. Dus: $\mathbf{L}_0(t) = L_0(t)\hat{k}$, met $L_0(t) = m\omega_0(R_0+\alpha t)^2$.

h) De energie van het object is niet constant in deze opgave, maar neemt toe. De kracht, die op het object werkt is niet conserverend. Dit volgt uit het feit dat $\nabla \times \mathbf{F} \neq 0$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}F_z(t) - \frac{\partial}{\partial z}F_y(t) \\ \frac{\partial}{\partial z}F_x(t) - \frac{\partial}{\partial x}F_z(t) \\ \frac{\partial}{\partial x}F_y(t) - \frac{\partial}{\partial y}F_x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}0 & - & 0 \\ 0 & - & \frac{\partial}{\partial x}0 \\ \frac{\partial}{\partial x}F_y(t) & - & \frac{\partial}{\partial y}F_x(t) \end{pmatrix} = \frac{4m\alpha\omega_0}{R_0+\alpha t}\hat{k} \neq 0. \quad (11)$$

Als je in deze opgave $\alpha = 0$ neemt, dan zie onmiddelijk dat $M_0 = 0$, $L_0 = m\omega_0 R_0^2 = constant$ en $\nabla \times \mathbf{F} = 0$, zodat de energie constant blijft.

Opgave 2

a) De wrijvingscoëfficiënt μ is een niet-negatief getal: $\mu \geq 0$. De vergelijking voor de wrijvingscoëfficiënt beschrijft een parabool, die overal een waarde groter dan 0 heeft. Dus: $\mu \geq 0$. De maximale waarde van de wrijvingscoëfficiënt is μ_0. De maximale waarde van de wrijvingscoëfficiënt volgt door de uitdrukking voor $\mu(x)$ te differentiëren naar x en dit gelijk aan nul te stellen. Dit geeft $x = \frac{L}{2}$. Invullen geeft $\mu(x)_{max} = \mu_0$. Dus $0 \leq \mu \leq \mu_0$.

b) De versnelling $a = \frac{F_w}{m} = \frac{\mu(x)N}{m} = \frac{\mu(x)mg}{m} = \mu(x)g$. De versnelling is maximaal halverwege de baan op $x = \frac{L}{2}$, en minimaal op $x = 0$ en $x = L$.

c) De arbeid die door de wrijvingskracht wordt verricht is gelijk aan:

$$W = \int_0^L F_w(x)dx = \int_0^L mg\mu(x)dx = mg\mu_0\int_0^L \left[1 - \frac{4}{L^2}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2\right]dx. \quad (12)$$

Deze integraal oplossen geeft:

$$W = mg\mu_0\left[x - \frac{4}{3L^2}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3\right]_0^L = mg\mu_0\left(L - \frac{4}{3L^2}\frac{L^3}{8} + \frac{4}{3L^2}\left(-\frac{L^3}{8}\right)\right) = \frac{2}{3}mg\mu_0 L. \quad (13)$$

d) Aan het begin van de ijsbaan op $x = 0$ heeft de curling steen een hoeveelheid energie $E = K = \frac{1}{2}mv_0^2$. Aan het eind van de ijsbaan is deze energie omgezet in warmte door de wrijvingskracht. De arbeid verricht door de wrijvingskracht is: $W = \frac{2}{3}mg\mu_0 L$. Hieruit volgt:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{2}{3}mg\mu_0 L \to v_0 = 2\sqrt{\frac{g\mu_0 L}{3}}. \quad (14)$$

Opgave 3

a) Bij een botsing spelen alleen *inwendige* krachten een rol, alle uitwendige krachten heffen elkaar op. De som van alle krachten op de twee objecten is nul, en volgens de eerste wet van Newton is dan de totale impuls van de twee objecten constant.

b) Behoud van impuls betekent:

$$P_a = P_b \leftrightarrow p_1 = q_1 + q_2 \leftrightarrow m_1 u = m_1 v_1 + m_2 v_2 \leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}u = \frac{m_1}{m_2}v_1 + v_2 \leftrightarrow ru = rv_1 + v_2. \quad (15)$$

Voor de kinetische energie geldt:

$$fK_a = K_b \leftrightarrow f\frac{1}{2}m_1u^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \leftrightarrow f\frac{m_1}{m_2}u^2 = \frac{m_1}{m_2}v_1^2 + v_2^2 \leftrightarrow fru^2 = rv_1^2 + v_2^2. \quad (16)$$

c) We hebben nu twee vergelijkingen met twee onbekenden:

$$\begin{cases} v_2 = r(u - v_1) \\ fru^2 = rv_1^2 + v_2^2 \end{cases} \quad (17)$$

De eerste vergelijking invullen in de tweede vergelijking geeft:

$$fru^2 = rv_1^2 + r^2(u - v_1)^2 = rv_1^2 + r^2u^2 - 2r^2uv_1 + r^2v_1^2. \quad (18)$$

Dit is een tweede graadsvergelijking in termen van de onbekende v_1:

$$fru^2 = (r + r^2)v_1^2 - 2r^2uv_1 + r^2u^2 \to (1+r)v_1^2 - 2ruv_1 + (r - f)u^2 = 0. \quad (19)$$

De onbekende snelheid v_1 volgt dan uit:

$$v_{1;1,2} = \frac{2ru \pm \sqrt{4r^2u^2 - 4(1+r)(r-f)u^2}}{2(1+r)} = \frac{ru}{1+r} \pm \frac{2u}{1+r}\sqrt{-r + f + rf}. \quad (20)$$

Snelheid is geen complexe grootheid, dus moet het getal onder de wortel groter zijn dan nul:

$$rf - r + f \geq 0 \leftrightarrow f(1+r) \geq r \leftrightarrow f \geq \frac{r}{1+r}. \tag{21}$$

d) De snelheden na de botsing volgen uit de twee vergelijkingen met $r = \frac{1}{2}$ en $f = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} v_2 = \frac{1}{2}(u - v_1) \\ \frac{1}{4}u^2 = \frac{1}{2}v_1^2 + v_2^2 \end{cases} \tag{22}$$

De eerste vergelijking invullen in de tweede vergelijking geeft:

$$\frac{1}{4}u^2 = \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}uv_1 + \frac{1}{4}v_1^2 \tag{23}$$

$$0 = 3v_1^2 - 2uv_1 \tag{24}$$

$$3v_1 = 2u \tag{25}$$

$$v_1 = \frac{2}{3}u. \tag{26}$$

Dit resultaat leidt tot: $v_2 = \frac{1}{2}(u - v_1) = \frac{1}{6}u$.