Tentamen
Datum: 24-03-2003

TN4110TU: Mechanica voor Technische Aardwetenschappen en Geodesie

L.R. van den Doel

L.R.vandenDoel@tnw.tudelft.nl

Delft University of Technology

Pattern Recognition Group
Department Imaging Science & Technology
Faculty of Applied Sciences
Delft University of Technology
Lorentzweg 1, 2628 CJ Delft, The Netherlands

Opgave 1

Een één-trapsraket (single stage rocket) wordt vanaf het aardoppervlak gelanceerd. Deze raket wordt voortgestuwd door massa naar achteren uit te stoten in de vorm van verbrandingsgassen. Bij de start heeft de *raket met brandstof* een massa $m_i = 60000kg$. Tijdens de lancering wordt $k = 150kg/s$ aan verbrandingsgassen uitgestoten met constante snelheid $v_0 = 6000m/s$. Als alle brandstof verbruikt is, heeft de raket een massa $m_f = 30000kg$. De massa $m(t)$ van de raket als functie van de tijd wordt gegeven door

$$m(t) = m_i - kt. \tag{1}$$

De snelheid $v(t)$ van de raket als functie van de tijd wordt gegeven door

$$v(t) = -v_0 \ln\left(\frac{m(t)}{m_i}\right) - gt, \tag{2}$$

waarin $g = 9.8m/s^2$ de zwaartekrachtsversnelling is.

a) **(1 punt)** Na hoeveel tijd heeft de raket al zijn brandstof verbruikt?
b) **(2 punten)** Wat is de snelheid van de raket op dat moment?
c) **(3 punten)** Wanneer is voortstuwings*kracht* van de raket groter, op $t = 0$ of op $t = t_f$, als alle brandstof verbruikt is?
d) **(2 punten)** Wanneer is de *versnelling* van de raket het grootst, op $t = 0$ of op $t = t_f$, als alle brandstof verbruikt is?
e) **(2 punten)** Wat is de maximale voortstuwingskracht van de raket?

- HINT : $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$.
- HINT : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Opgave 2

Beschouw een helling onder een hoek α met de horizontaal. Deze helling heeft een wrijvingscoëfficiënt, die afhangt van de positie op de helling. Als d de positie is op de helling ten opzichte van de onderkant van de helling, dan nemen we als model voor de wrijvingscoëfficiënt $\mu = \mu(d) = Ad$, met A een positieve constante. Met andere woorden, als een voorwerp de helling opgeschoven wordt, dan ondervindt dit voorwerp een steeds grotere wrijvingskracht. Neem aan dat de statische wrijvingscoëfficiënt gelijk is aan de kinetische wrijvingscoëfficiënt. Beschouw nu een voorwerp dat deze helling wordt opgeschoven. Onderaan de helling heeft het voorwerp een snelheid v_0.

a) **(1 punt)** Geef een kwalitatieve beschrijving over wat er met de doos gebeurd als de doos een *lage* beginsnelheid v_0 onderaan de helling heeft?
b) **(1 punt)** Geef een kwalitatieve beschrijving over wat er met de doos gebeurt als de doos een *hoge* beginsnelheid v_0 onderaan de helling heeft?
c) **(2 punten)** Bepaal de minimale afstand d_{min} op de helling, waar geldt dat de doos blijft liggen. Druk deze afstand uit in α en A.
d) **(3 punten)** Stel dat de doos onderaan de helling de juiste beginsnelheid heeft om precies dit punt te bereiken, dat wil zeggen dat de doos op de helling blijft liggen. Hoeveel arbeid heeft dan de wrijvingskracht verricht?
e) **(3 punten)** Bepaal nu de minimale beginsnelheid v_0 van het voorwerp onderaan de helling om op de helling tot rust te komen. Druk deze snelheid uit in termen van g, A, en α.

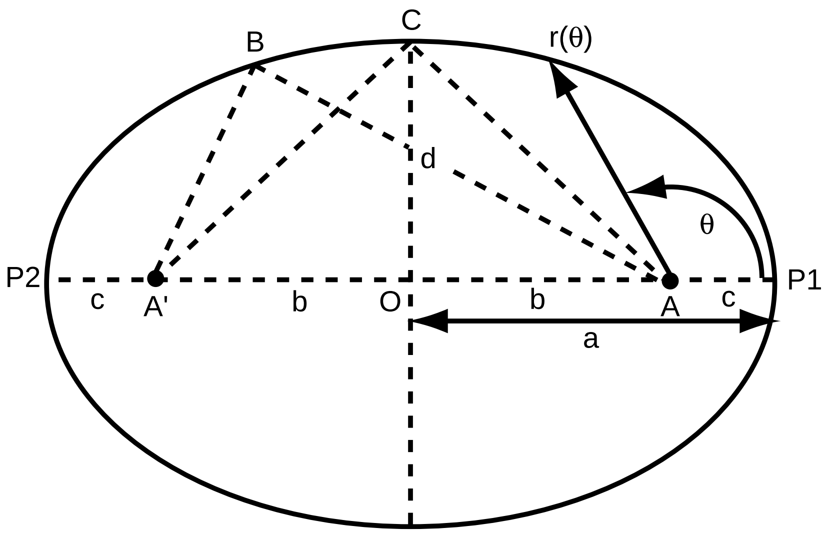
Opgave 3

Een satelliet met massa m wordt door de gravitatiekracht van de aarde (massa M) in een baan $r(\theta)$ om de aarde gehouden. De vergelijking van deze ellipsvormige baan wordt gegeven door

$$r(\theta) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos\theta}, \tag{3}$$

waarin $0 < \epsilon < 1$ de excentriciteit van de baan is en α een constante. Deze baan is getekend in de onderstaande figuur. In deze figuur zijn de twee brandpunten A en A' van de ellips aangegeven. In brandpunt A bevindt zich de aarde. Een ellips wordt gekenmerkt door het volgende: *de som van de afstanden van de brandpunten naar een punt op de ellips is voor ieder punt dezelfde.* Dus: de afstand ABA' is gelijk aan de afstand ACA'. Met behulp van de stelling van Pythagoras en bovenstaande formule is eenvoudig af te leiden dat de volgende relaties gelden:

$$a = OP_1 = \frac{\alpha}{1-\epsilon^2}, b = OA = \frac{\epsilon\alpha}{1-\epsilon^2}, c = AP_1 = \frac{\alpha}{1+\epsilon}, d = OC = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \tag{4}$$



a) **(2 punten)** Leg uit dat de mechanische energie E constant is voor deze satelliet:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) = constant, \tag{5}$$

waarin r de afstand is van de aarde naar een punt op de baan en $U(r)$ de potentiële energie op dat punt. Geef ook een uitdrukking voor de potentiële energie $U(r)$.

b) **(2 punten)** Leg uit dat het impulsmoment $\mathbf{L}_A$ ten opzichte van het centrum van de aarde constant is voor deze satelliet en geeft een uitdrukking voor het impulsmoment L in de vorm $L = \ldots = constant$.

c) **(2 punt)** Als de snelheid in het punt P_1 gelijk is aan v_1. Druk dan de snelheid v_2 in het punt P_2 uit in termen van v_1 en andere constanten door gebruik te maken van behoud van *impulsmoment*.

d) **(2 punt)** Als de snelheid in het punt P_1 gelijk is aan v_1. Druk dan de snelheid v_2 in het punt P_2 uit in termen van v_1 en andere constanten door gebruik te maken van behoud van *energie*.

e) **(2 punten)** Druk de snelheden v_1 en v_2 uit in de parameters van de baan ϵ en α en G en M.

Opgave 4

Een thermisch neutron met massa $m_1 = m$ en snelheid u_1 botst op een stilstaand deuteron met massa $m_2 = 2m$. Na de botsing heeft het thermisch neutron een snelheid v_1 en deze snelheid staat loodrecht op zijn beginsnelheid u_1: dat wil zeggen dat het thermisch neutron over een hoek van $90°$ is verstrooid. Het deuteron heeft na de botsing een snelheid v_2 en deze snelheid maakt een hoek θ_2 met de beginsnelheid u_1.

a) **(3 punten)** Druk de snelheid $\mathbf{v}_1$ van het thermisch neutron ná de botsing uit in $\mathbf{u}_1$, de snelheid van het neutron vóór de botsing.
b) **(3 punten)** Druk de snelheid $\mathbf{v}_2$ van het deuteron ná de botsing uit in $\mathbf{u}_1$, de snelheid van het thermisch neutron vóór de botsing.
c) **(2 punten)** Bereken de hoek θ_2.
d) **(2 punten)** Hoeveel kinietische energie draagt het thermisch neutron over aan het deuteron?

Formulelijst

Deze lijst wordt bij elk tentamen uitgereikt. U dient op de hoogte te zijn van de betekenis van de gebruikte symbolen, alsook van de voorwaarden waaronder de verschillende formules geldig zijn. Triviale formules, zoals de tweede wet van Newton, zijn niet in deze lijst opgenomen.

Poolcoördinaten: $d\mathbf{e}_r/dt = \dot{\varphi}\ \mathbf{e}_\varphi$ en $d\mathbf{e}_\varphi/dt = -\dot{\varphi}\ \mathbf{e}_r$
Eén deeltje: $\mathbf{a}_{\tan} = \dot{v}\ \mathbf{e}_{\tan}$; $\mathbf{a}_\mathsf{n} = \frac{v^2}{R}\ \mathbf{e}_\mathsf{n}$ $\mathbf{v}_\mathsf{rad} = \dot{r}\ \mathbf{e}_r$; $\mathbf{v}_\mathsf{tr} = r\dot{\varphi}\ \mathbf{e}_\varphi$
Ongedempte harm. trilling: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{b}}$ $x = A\cos(\omega t + \varphi)\,,\ \omega = \sqrt{b/m}$ $\mathbf{F}_\mathsf{grav} = f(r)\ \mathbf{e}_r, \quad f(r) = (-Gm_1m_2)/r^2$ $F_\mathsf{w,st} \le \mu_\mathsf{st}F_\mathsf{n}; \quad F_\mathsf{w,k} = \mu_\mathsf{k}F_\mathsf{n}$ $P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ $dE_\mathsf{k} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -dE_\mathsf{p}$ $\mathbf{F} = -\nabla E_\mathsf{p} \ \Rightarrow\ F_x = -\partial E_\mathsf{p}/\partial x$ enz. $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \ \Leftrightarrow\ \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y = 0$ enz. $\mathbf{F} = f(r)\ \mathbf{e}_r \ \Leftrightarrow\ f(r) = -dE_p/dr$
Impuls- en krachtmoment: $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times m\mathbf{v}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}; \quad \mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$
Twee deeltjes: $E_\mathsf{k} = E'_\mathsf{k} + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_\mathsf{C}^2$ $E_\mathsf{k} = \frac{1}{2}\mu v_\mathsf{rel}^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_\mathsf{C}^2$ $\mathbf{L}_\mathsf{C} = \mathbf{r}_{12}\times\mu\mathbf{v}_\mathsf{rel}$
N deeltjes: $E_\mathsf{k} = E'_\mathsf{k} + \frac{1}{2}mv_\mathsf{C}^2$ $\mathbf{L}_\mathsf{O} = \mathbf{L}_\mathsf{C} + \mathbf{r}_\mathsf{C}\times m\mathbf{v}_\mathsf{C}$