Tentamen
Datum: 26-06-2003

TN4110TU: Mechanica voor Technische Aardwetenschappen en Geodesie (uitwerkingen extra herkansing)

L.R. van den Doel

L.R.vandenDoel@tnw.tudelft.nl

Delft University of Technology

Pattern Recognition Group
Department Imaging Science & Technology
Faculty of Applied Sciences
Delft University of Technology
Lorentzweg 1, 2628 CJ Delft, The Netherlands

Opgave 1

a) De tijdsduur ΔT kan berekend worden door $y(t) = 0$ uit te rekenen:

$$y(t) = 0 = (v_0 \sin\phi)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$
$$0 = t(v_0 \sin\phi - \frac{1}{2}gt) \tag{2}$$
$$\Delta T = \frac{2v_0 \sin\phi}{g}. \tag{3}$$

b) Vul ΔT in in de uitdrukking voor $x(t)$:

$$\Delta x = x(t = \frac{2v_0 \sin\phi}{g}) = v_0 \cos\phi \frac{2v_0 \sin\phi}{g} = \frac{2v_0^2 \sin\phi \cos\phi}{g}. \tag{4}$$

c) Het maximale bereik Δx als functie van de hoek, volgt door de gevonden uitdrukking voor Δx te differentiëren naar ϕ en gelijk aan nul te stellen:

$$\frac{d}{d\phi}\Delta x(\phi) = \frac{d}{d\phi}\frac{2v_0^2 \sin\phi \cos\phi}{g} \tag{5}$$
$$= \frac{2v_0^2}{g}\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right) = 0 \tag{6}$$

De laatste uitdrukking op lossen geeft:

$$0 = \cos^2\phi - \sin^2\phi = 2\cos^2\phi - 1 \rightarrow \cos^2\phi = \frac{1}{2} \rightarrow \cos\phi = \frac{1}{2}\sqrt{2} \rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}. \tag{7}$$

d) Voor het hoogste punt van de baan geldt $\frac{dy(t)}{dt} = 0$. Met andere woorden de snelheid $v_y(t)$ in het hoogste punt van baan is nul. De snelheid in het hoogste punt van de baan is $v_x = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 \cos\phi$. De normale component van de versnelling is de component van de versnelling loodrecht op de snelheid. Omdat $v = v_x$ in het hoogste punt van de baan is a_n gewooon de versnelling ten gevolge van de zwaartekracht: $a_n = g$. Dit invullen in de uitdrukking voor de kromtestraal geeft: $R = \frac{v_0^2 \cos^2\phi}{g}$.

e) In onderdeel (b) is al berekend dat het bereik $\Delta x = \frac{2v_0^2 \sin\phi \cos\phi}{g}$. De maximale hoogte volgt uit

$$\frac{dy(t)}{dt} = v_0 \sin\phi - gt = 0 \rightarrow t = \frac{v_0 \sin\phi}{g}\left(= \frac{\Delta T}{2}\right). \tag{8}$$

Deze tijdsduur invullen in de uitdrukking voor $y(t)$ geeft:

$$H = y(t = \frac{v_0 \sin\phi}{g}) \tag{9}$$
$$= v_0 \sin\phi \frac{v_0 \sin\phi}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\phi}{g}\right)^2 \tag{10}$$
$$= \frac{v_0^2 \sin^2\phi}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\phi}{2g} \tag{11}$$
$$= \frac{v_0^2 \sin^2\phi}{2g}. \tag{12}$$

Nu wordt gevraagd het volgende uit te rekenen: $H = R$ en $\Delta x = fR$:

$$\begin{cases} H = \frac{v_0^2 \sin^2\phi}{2g} = \frac{v_0^2\cos^2\phi}{g} = R \\ \Delta x = \frac{2v_0^2 \sin\phi\cos\phi}{g} = f\frac{v_0^2\cos^2\phi}{g} = fR \end{cases} \tag{13}$$

Dit vereenvoudigen geeft:

$$\begin{cases} \frac{\sin^2\phi}{2} = \cos^2\phi \\ \sin\phi = \frac{f}{2}\cos\phi. \end{cases} \tag{14}$$

Uit de eerste uitdrukking volgt:

$$\frac{\sin^2\phi}{2} = \cos^2\phi \rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\phi = \cos^2\phi \rightarrow \cos\phi = \frac{1}{3}\sqrt{3}. \tag{15}$$

of

$$\frac{\sin^2\phi}{2} = \cos^2\phi \rightarrow \frac{\sin^2\phi}{2} = 1 - \sin^2\phi \rightarrow \sin^2\phi = \frac{2}{3} \rightarrow \sin\phi = \frac{1}{3}\sqrt{6}. \tag{16}$$

De uitdrukkingen voor $\sin\phi$ en $\cos\phi$ invullen in de uitdrukking voor $\Delta x = fR$ geeft:

$$\sin\phi = \frac{f}{2}\cos\phi \rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{6} = \frac{f}{2}\frac{1}{3}\sqrt{3} \rightarrow f = 2\sqrt{2}. \tag{17}$$

f) Als $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ als functie van de tijd alleen maar mag toenemen, dan moet $\frac{dr(t)}{dt} > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dr(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\sqrt{(v_0^2\cos^2\phi)t^2 + (v_0^2\sin^2\phi)t^2 - (v_0 g\sin\phi)t^3 + \frac{1}{4}g^2t^4} && (18) \\ &= \frac{d}{dt}\sqrt{v_0^2t^2 - (v_0g\sin\phi)t^3 + \frac{1}{4}g^2t^4} && (19) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dt}(v_0^2t^2 - (v_0g\sin\phi)t^3 + \frac{1}{4}g^2t^4)}{\sqrt{v_0^2t^2 - (v_0g\sin\phi)t^3 + \frac{1}{4}g^2t^4}} = 0 && (20) \end{aligned}$$

Oftewel:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(v_0^2t^2 - (v_0g\sin\phi)t^3 + \frac{1}{4}g^2t^4) && (21) \\ &= 2v_0^2t - 3(v_0g\sin\phi)t^2 + g^2t^3 && (22) \\ &= 2v_0^2 - 3(v_0g\sin\phi)t + g^2t^2 && (23) \end{aligned}$$

Als de oplossing van de tweedegraadsvergelijking reële oplossingen zijn, dan betekent dat dat $r(t)$ ergens een maximale waarde heeft. Met andere woorden, $r(t)$ neemt toe en daarna weer af. We moeten dus zoeken naar oplossingen die niet reëel zijn. De oplossing van de tweedegraadsvergelijking volgt uit:

$$t_{1,2} = \frac{3v_0g\sin\phi \pm \sqrt{9v_0^2g^2\sin^2\phi - 8v_0^2g^2}}{2g^2} \tag{24}$$

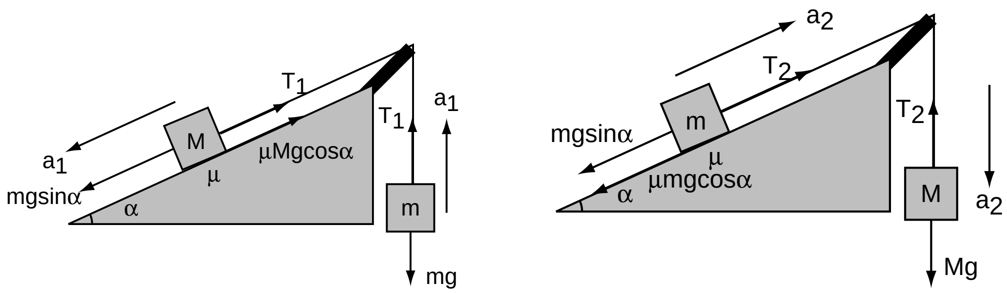
Dit zijn reële tijden als de factor onder de wortel positief is:

$$\sqrt{9v_0^2 g^2 \sin^2\phi - 8v_0^2 g^2} > 0 \rightarrow \sin\phi > \frac{8}{9}. \tag{25}$$

Omdat we op zoek zijn naar niet reële oplossingen, moet dus gelden dat

$$\sin\phi < \frac{8}{9}. \tag{26}$$

Opgave 2



a) Merk op dat de versnellingen van de beide massa's gelijk moet zijn! Uit de tekening kunnen de volgende krachtenbalansen opgemaakt worden:

$$\begin{cases} M : Ma_1 = Mg\sin\alpha - \mu Mg\cos\alpha - T_1 \\ m : ma_1 = T_1 - mg \end{cases} \tag{27}$$

De tweede vergelijking invullen in de eerste vergelijking geeft:

$$Ma_1 = Mg\sin\alpha - \mu Mg\cos\alpha - ma_1 - mg \tag{28}$$

$$(m+M)a_1 = Mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - mg \tag{29}$$

$$a_1 = \left[\frac{M(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m}{m+M}\right] g \tag{30}$$

De uitdrukking voor a_1 invullen in de onderste krachtenbalans geeft:

$$T_1 = m\left[\frac{M(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m}{m+M}\right] g + mg \tag{31}$$

$$= \left[\frac{mM(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m^2}{m+M}\right] g + \frac{m^2 + mM}{m+M} g \tag{32}$$

$$= \frac{mM}{m+M}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha + 1)g. \tag{33}$$

b) Uit de tekening kunnen de volgende krachtenbalansen opgemaakt worden:

$$\begin{cases} M : Ma_2 = Mg - T_2 \\ m : ma_2 = T_2 - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \end{cases} \tag{34}$$

De eerste vergelijking invullen in de tweede vergelijking geeft:

$$(m+M)a_2 = Mg - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \tag{35}$$

$$(m+M)a_2 = Mg - mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \tag{36}$$

$$a_2 = \left[\frac{M - m(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m+M}\right] g \tag{37}$$

De uitdrukking voor a_2 invullen in de bovenste krachtenbalans geeft:

$$T_2 = Mg - M\left[\frac{M - m(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m+M}\right] g \tag{38}$$

$$= \frac{mM + M^2}{m+M} g - \left[\frac{M^2 - mM(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m+M}\right] g \tag{39}$$

$$= \frac{mM}{m+M}(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha) g. \tag{40}$$

c) Uit onderdeel (a) en onderdeel (b) volgt:

$$\begin{cases} a_1 = \left[\frac{M(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m}{m+M}\right] g \\ a_2 = \left[\frac{M - m(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m+M}\right] g \end{cases} \tag{41}$$

De bovenste vergelijking delen door de onderste vergelijking geeft:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{M(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m}{M - m(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{42}$$

Aan beide kanten teller en noemer delen door M geeft:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha - \frac{m}{M}}{1 - \frac{m}{M}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{43}$$

Dit herschrijven geeft:

$$(1 - \frac{m}{M}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha))a_1 = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha - \frac{m}{M})a_2 \tag{44}$$

$$a_1 - \frac{m}{M}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)a_1 = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)a_2 - \frac{m}{M}a_2 \tag{45}$$

$$\frac{m}{M}a_2 - \frac{m}{M}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)a_1 = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)a_2 - a_1 \tag{46}$$

$$\frac{m}{M} = \frac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)a_2 - a_1}{a_2 - (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)a_1} \tag{47}$$

d) De beginsnelheid van beide massa's is 0. De eindsnelheid van beide massa's is v. De verandering van kinetische energie is dus $\frac{1}{2}mv^2$ voor de kleine massa en $\frac{1}{2}Mv^2$ voor de grote massa. In het eerste experiment beweegt de kleine massa omhoog over een afstand l. Hierdoor neemt zijn potentiële energie toe met mgl. De zware massa beweegt $l\sin\alpha$ meter omlaag. Zijn afname van potentiële energie is $Mgl\sin\alpha$. De arbeid verricht door de wrijvingskracht is gelijk aan $W = -l\mu Mg\cos\alpha$.

ΔK_M	$\frac{1}{2}Mv^2$
ΔK_m	$\frac{1}{2}mv^2$
ΔU_M	$-Mgl\sin\alpha$
ΔU_m	mgl
W	$-l\mu Mg\cos\alpha$

De verandering van kinetische en potentiële energie is gelijk aan de verrichte arbeid:

$$-l\mu Mg\cos\alpha = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 - Mgl\sin\alpha + mgl \tag{48}$$

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = Mgl\sin\alpha - l\mu Mg\cos\alpha - mgl \tag{49}$$

$$v^2 = 2\frac{M(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m}{m+M}gl \tag{50}$$

$$v^2 = 2a_1 l. \tag{51}$$

$$v = \sqrt{2a_1 l}. \tag{52}$$

Dit resultaat kan ook eenvoudiger worden gevonden. De massa's bewegen over een afstand l vanuit stilstand met versnelling a_1. De kinetische bewegingsvergelijking die daarbij hoort is:

$$x(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2. \tag{53}$$

Deze vergelijking oplossen voor $x(t) = l$ geeft $t = \sqrt{\frac{2l}{a_1}}$. De uitdrukking voor $x(t)$ differentiëren geeft $v(t) = a_1 t$. De gevonden tijd invullen geeft: $v = \sqrt{2a_1 l}$. Dit is een voorbeeld waarbij gebruikmaken van de kinematische bewegingsvergelijkingen eenvoudiger is dan gebruik maken van energie beschouwingen!

Opgave 3

a) De snelheid van object 1 is $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{12}{4} = 3m/s$.

b) De snelheid van object 2 is $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0}{4} = 0m/s$.

c) Als je de lijnen doortrekt, dan snijden de lijnen elkaar op $t = 7s$.

d) Op $t = 0s$ bevindt het massamiddelpunt zich op $X_C = \frac{2\cdot -21 + 4\cdot 0}{6} = -7m$. Op $t = 7s$ bevindt het massamiddelpunt zich op $x = 0m$. Dus de lijn die de beweging van het massamiddelpunt beschrijft gaat door deze twee punten $(x = -7, t = 0)$ en $(x = 0, t = 7)$. Deze lijn moet ook worden doorgetrokken voor $t > 7s$.

e) Dit kan op verschillende manieren worden uitgerekend. Een manier is in het LAB-systeem. Behoud van impuls en kinetische energie geeft de volgende vergelijkingen:

$$\begin{cases} p_1 = q_1 + q_2 \\ \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{q_1^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2} \end{cases} \tag{54}$$

De bovenste vergelijking invullen in de onderste geeft:

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{(p_1 - q_2)^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2} \tag{55}$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1^2}{2m_1} - \frac{2p_1 q_2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2} \tag{56}$$

$$0 = -\frac{2p_1}{m_1} + q_2\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \tag{57}$$

$$q_2 = \frac{2p_1}{m_1}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{58}$$

$$q_2 = 2p_1\frac{m_2}{m_1 + m_2} \tag{59}$$

$$q_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3\frac{4}{2+4} = 8kgm/s. \tag{60}$$

Hieruit volgt:

$$q_1 = p_1 - q_2 = p_1 - 2p_1\frac{m_2}{m_1 + m_2} = p_1\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 2 \cdot 3\frac{2-4}{2+4} = -2kgm/s. \tag{61}$$

f) De snelheden na de botsing zijn dan: $v_1 = -1m/s$ en $v_2 = 2m/s$. De afgelegde weg na vijf seconden is $\Delta x_1 = -5m$ and $\Delta x_2 = 10m$. De lijnen gaan vanaf het snijpunt door de punten $(x = -5, t = 12)$ en $(x = 10, t = 12)$.

g) Als de botsing volledig inelastisch is, dan beweegt het nieuwe object met massa $m_1 + m_2$ precies langs de lijn van het massamiddelpunt.