Tentamen
Datum: 29-08-2003

TN4110TU: Mechanica voor Technische Aardwetenschappen en Geodesie - Uitwerkingen

L.R. van den Doel

L.R.vandenDoel@tnw.tudelft.nl

Delft University of Technology

Pattern Recognition Group
Department Imaging Science & Technology
Faculty of Applied Sciences
Delft University of Technology
Lorentzweg 1, 2628 CJ Delft, The Netherlands

Opgave 1

a) Ja, de mechaniche energie E is constant of behouden, omdat de gravitatiekracht een omgekeerd kwadratische kracht is, en die is per definitie behouden. De mechanische energie E van de satelliet wordt gegeven door:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R} = constant. \tag{1}$$

b) Ja, het impulsmoment $\mathbf{L}$ is constant of behouden, want de gravitatiekracht is een centrale kracht, dus is het krachtmoment $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ten opzichte van het middelpunt van de aarde $\mathbf{0}$. Het impulsmoment wordt gegeven door:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \Rightarrow L = Rmv = constant. \tag{2}$$

c) De satelliet beweegt in een cirkelvormige baan, dus de gravitatiekracht moet gelijk zijn aan de centripetale kracht:

$$G\frac{mM}{R^2} = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2}mR, \tag{3}$$

waarin ω de hoeksnelheid is, en $T = 24uur$ de periode. Dit oplossen voor R geeft:

$$G\frac{M}{R^2} = 4\pi^2 f^2 R \Rightarrow R^3 = \frac{GM}{4\pi^2}T^2. \tag{4}$$

Dit resultaat is bekend als de derde wet van Kepler. Dit resultaat invullen geeft:

$$R = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67 \times 10^{-11} \cdot 6 \times 10^{24} \cdot (24 \cdot 60 \cdot 60)^2}{4\pi^2}} = 4.23 \times 10^4 km. \tag{5}$$

d) Als de satelliet in een baan met straal R beweegt, dan is zijn totale energie gelijk aan:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R}. \tag{6}$$

Bedenk dat de gravitatiekracht nog steeds gelijk moet zijn aan de centripetale kracht, dus:

$$G\frac{mM}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{2R}. \tag{7}$$

Dit invullen geeft:

$$E = -G\frac{mM}{2R}. \tag{8}$$

De mechanische energie E van de satelliet is negatief; dit betekent dat de satelliet gebonden is aan de aarde. Als de straal van de baan verandert van R naar $2R$, dan moet de mechanische energie E' gelijk worden aan:

$$E' = -G\frac{mM}{4R}. \tag{9}$$

De energie, die aan de satelliet moet worden toegevoegd is dan:

$$\Delta E = E' - E = -G\frac{mM}{4R} + G\frac{mM}{2R} = G\frac{mM}{4R}. \tag{10}$$

e) De nieuwe periode T' volgt uit de derde wet van Kepler:

$$T'^2 = \frac{4\pi^2}{GM}(2R)^3 = 8\frac{4\pi^2}{GM}R^3 = 8T^2, \tag{11}$$

oftewel

$$T' = 2\sqrt{2}T = 2.8 dagen. \tag{12}$$

De nieuwe omwentelingssnelheid in aantal omwentelingen per dag is dan $f' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{2.8} = 0.7$ omwentelingen per dag

Opgave 2

a) Uitgangspunt voor deze opgave is functie

$$f(r) = \exp(-\frac{r^2}{s^2}). \tag{13}$$

Merk op dat dit een even functie is, want $f(-r) = f(r)$. Een even functie geeft hetzelfde resultaat na spiegeling ten opzichte van de y-as. Deze functie heeft de welbekende klok-vorm. De eerste afgeleide van deze functie is:

$$\frac{df(r)}{dr} = -\frac{2r}{s^2}\exp(-\frac{r^2}{s^2}). \tag{14}$$

Dit is een oneven functie. De functie die we zoeken moet even zijn. De tweede afgeleide van deze functie is:

$$\frac{d^2f(r)}{dr^2} = \left(\frac{4r^2-2}{s^2}-\right)\exp(-\frac{r^2}{s^2}). \tag{15}$$

Dit is de functie, waar we naar op zoek zijn. De potentiële energie functie wordt gegeven door:

$$U(r) = \left(\frac{4r^2-2s^2}{s^4}-\right)\exp(-\frac{r^2}{s^2}). \tag{16}$$

b) De relatie tussen de kracht $\mathbf{F}(r)$ en de potentiële energie $U(r)$ wordt gegeven door

$$\mathbf{F}(r) = -\frac{dU(r)}{dr}\hat{r} = -\frac{d}{dr}\left(\left(\frac{4r^2-2}{s^2}-\right)\exp(-\frac{r^2}{s^2})\right)\hat{r} \tag{17}$$

$$= -\frac{4r}{s^6}(-2r^2+3s^2)\exp(-\frac{r^2}{s^2})\hat{r} \tag{18}$$

c) De kracht $\mathbf{F}(r) = 0$ als

$$-\frac{4r}{s^6}(-2r^2+3s^2)\exp(-\frac{r^2}{s^2}) = 0 \Rightarrow r = 0 \bigvee r = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}s = \pm r_1. \tag{19}$$

d)
1. Voor $r < -r_1$ ondervindt het deeltje een kracht in de "negatieve"r-richting. Het alpha deeltje beweegt dan dus naar links.
2. Voor $-r_1 < r < 0$ ondervindt het deeltje een kracht in de positieve r-richting. Het alpha deeltje beweegt dan dus naar rechts.
3. Voor $0 < r < r_1$ ondervindt het deeltje een kracht in de "negatieve"r-richting. Het alpha deeltje beweegt dan dus naar links.
4. Voor $r > r_1$ ondervindt het deeltje een kracht in de positieve r-richting. Het alpha deeltje beweegt dan dus naar rechts.

Opgave 3

a) De eenheid van vermogen is

$$W = \frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{kg \cdot m \cdot m}{s^2 \cdot s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}. \tag{20}$$

b) Met $F = m\frac{dv}{dt}$ volgt:

$$mv\frac{dv}{dt} = P \Rightarrow vdv = \frac{P}{m}dt \Rightarrow \int vdv = \int \frac{P}{m}dt \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{P}{m}t + c. \tag{21}$$

De constante $c = 0$ omdat de beginsnelheid 0 is. Herschrijven geeft:

$$v(t) = \sqrt{\frac{2P}{m}}\sqrt{t}. \tag{22}$$

Een tweede manier is de volgede: in een tijd t wordt een hoeveelheid arbeid Pt geleverd, die volledig wordt omgezet in kinetische energie $K = \frac{1}{2}mv^2$. Dit aan elkaar gelijk stellen geeft hetzelfde resultaat. Een derde manier is om de uitdrukking voor $v(t)$ te differentiëren naar de tijd t. Dit geeft de versnelling $a(t)$ en de kracht $F(t) = ma(t)$. Invullen in $P = Fv$ en oplossen voor v geeft hetzelfde resultaat.

c) De afgelegde weg $x(t)$ volgt door de uitdrukking voor $v(t)$ te integreren:

$$x(t) = \int v(t)dt \left(= \int \frac{dx)}{dt}dt = \int dx \right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P}{m}}t^{\frac{3}{2}} + c, \tag{23}$$

waarin de constante $c = 0$, omdat we $x(0) = 0$ kiezen.

d) Los op $x(t) = 25$:

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2P}{m}}t^{\frac{3}{2}} = 25 \Rightarrow t = \frac{1}{2}75^{\frac{2}{3}}\left(\frac{m}{P}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{24}$$

e) Deze tijd invullen in de uitdrukking voor de snelheid geeft:

$$v(t = \frac{1}{2}75^{\frac{2}{3}}\left(\frac{m}{P}\right)^{\frac{1}{3}}) = \sqrt{\frac{2P}{m}}\left(\frac{1}{2}75^{\frac{2}{3}}\left(\frac{m}{P}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{75P}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{25}$$

f)

$$v = \left(\frac{75 \cdot 200 \cdot 7.36 \times 10^2}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} = 22.3m/s = 80km/uur. \tag{26}$$

Gotcha!!!