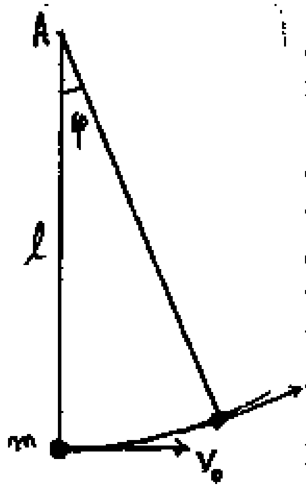
TENTAMEN tn 411 (MECHANICA-1 voor TA[1])

**op maandag 18 juni 2001 van 14 - 17 uur.**

N.B. **Vetgedrukte** symbolen zijn vectoren! N.B. *Geen* kladpapier inleveren, s.v.p.!

*Vermeld op het werk s.v.p. je 7-cijferige studienummer!*

**1** Een bol (massa *m*) die als puntmassa beschouwd kan worden, is door middel van een massaloos, onrekbaar koord in een punt A vrij draaibaar opgehangen. De lengte van het koord is $\ell$. Men stoot de bol weg met een horizontale beginsnelheid $\vec{v}_0$. De valversnelling is $\vec{g}$. De afgelegde hoek wordt $\varphi$ genoemd (zie tekening).




**a.** Stel, $v_0 = \sqrt{g\ell}$. Bewijs dat in dit geval voor de snelheid als functie van $\varphi$ geldt: $v = \sqrt{g\ell(-1+2\cos\varphi)}$.

**b.** Bereken de maximale waarde van $\varphi$ (als $v_0 = \sqrt{g\ell}$).

**c.** Bereken de grootte van de spankracht in de draad als functie van $\varphi$ (uitgedrukt in *m*, g en $\varphi$) als $v_0 = \sqrt{g\ell}$.

**d.** We doen de proef nog eens, maar deze keer met een grotere beginsnelheid: $v_0$ is nu gelijk aan $\sqrt{3g\ell}$.
Voor de snelheid als functie van hoek $\varphi$ geldt nu *(zolang de draad strak gespannen blijft)*: $v = \sqrt{g\ell(1+2\cos\varphi)}$ en voor de spankracht: $F_s = mg\,(1+3\cos\varphi)$ (bewijs wordt niet gevraagd).
Bereken de maximale waarde van $\varphi$ in dit geval.

**2** Op een puntmassa werkt een kracht **F** waarvan de z-component nul is; verder is $F_x = 6xy+4x$ en $F_y = 3x^2+5$ (N).

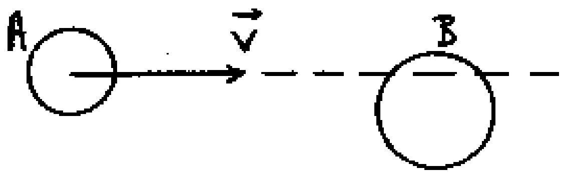
**a.** Toon aan dat dit krachtveld conserverend is.

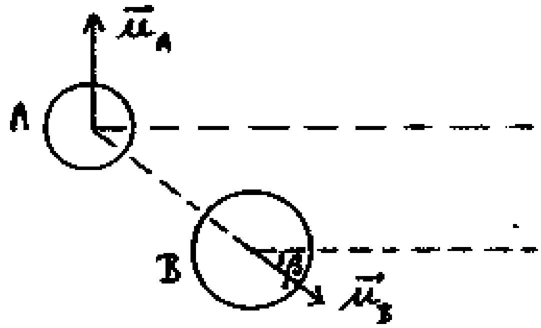
**b.** Bereken de arbeid, verricht door deze kracht, als de puntmassa van het punt P (2;1;0) wordt verplaatst naar de oorsprong O, langs een zelf te kiezen weg.

**c.** Bereken de potentiële energie $E_p$ als functie van de plaats, d.w.z. bereken $E_p$ (x,y). Stel daarbij $E_p = 0$ in O.

Z. O. Z.

**3** Een cirkelvormige gladde schijf A (massa $m_A = 1{,}0$ kg) beweegt met een snelheid $\vec{v}$ van 2,0 m/s over een volkomen glad, horizontaal oppervlak en botst scheef tegen een tot dan toe stil-liggende cirkelvormige gladde schijf B (massa $m_B = 3{,}0$ kg); zie de linkertekening. **De botsing is volkomen elastisch.**



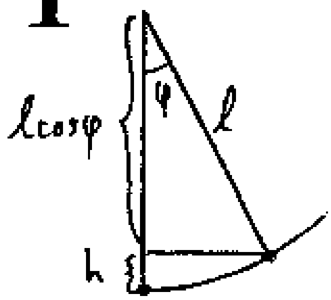




Na de botsing beweegt A over het gladde horizontale oppervlak met een snelheid $\vec{u}_A$ die loodrecht staat op zijn oorspronkelijke snelheid $\vec{v}$. B heeft nu een snelheid $\vec{u}_B$; deze maakt een hoek $\beta$ met $\vec{v}$; zie de rechtertekening.

**a.** Bereken de snelheid van het massamiddelpunt C vóór de botsing, uitgedrukt in $\vec{v}$.
**b.** Bereken de kinetische energie $E_k'$ vóór de botsing in het massamiddelpunt-coördinatenstelsel.
**c.** Bereken $u_A$, $u_B$ en $\beta$.
**d.** Hoe groot is de relatieve snelheid $\vec{u}_A - \vec{u}_B$ na de botsing? (beredeneer je antwoord!).

TENTAMEN tn 411 van 18/6-2001: UITWERKING.

**1** **a.** $h = \ell - \ell\cos\varphi \Rightarrow E_p = mg\ell\,(1 - \cos\varphi)$. Wet van behoud van mechanische energie:




$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mg\ell\,(1 - \cos\varphi) = \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}mg\ell.$$

$$\rightarrow\ v^2 = g\ell - 2g\ell\,(1 - \cos\varphi) = g\ell\,(-1 + 2\cos\varphi).$$

**b.** Naarmate $\varphi$ toeneemt, wordt $v$ kleiner. De grens is bereikt als $v = 0 \rightarrow 0 = g\ell\,(-1 + 2\cos\varphi_{max}) \rightarrow \cos\varphi_{max} = \tfrac{1}{2}$
$\rightarrow \varphi_{max} = \pi/3$ rad (d.i. 60°).

**c.** $\mathbf{F}_s + m\vec{g} = m\vec{a}$ dus voor de normale componenten: $F_s - mg\cos\varphi = mv^2/\ell$
$\rightarrow F_s = mg\cos\varphi + mg\,(-1 + 2\cos\varphi) = mg\,(-1 + 3\cos\varphi)$.

**d.** De maximale $\varphi$ is nu een stompe hoek. Bedenken we dat de draad strak gespannen moet blijven, dan leidt dat tot de eis: $F_s > 0 \rightarrow 1 + 3\cos\varphi > 0 \rightarrow \varphi_{max}$ = de stompe hoek waarvan de cosinus de waarde $\tfrac{1}{3}$ heeft $\rightarrow \varphi_{max} = \pi - \arccos(\tfrac{1}{3}) = \pi - 1{,}23 = 1{,}91$ rad (d.i. 109°).

*Opmerking:* v is dan nog niet nul; v is dan namelijk $= \sqrt{\tfrac{1}{3}g\ell}$.

**2** **a.** $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = 6x = \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$ enz.! **b.** Bijvoorbeeld via punt Q (2;0;0):

$$W_{P\to O} = \int_P^Q F_y\,dy + \int_Q^O F_x\,dx = \int_1^0 17\,dy + \int_2^0 4x\,dx = -25\,(J).$$

**c.** $\partial E_p/\partial x = -6xy - 4x \rightarrow E_p = -3x^2y - 2x^2 + f(y)$; $\partial E_p/\partial y = -3x^2 - 5 \Rightarrow E_p = -3x^2y - 5y + g(x)$.

*Conclusie:* $E_p = -3x^2y - 2x^2 - 5y + C$. Maar $C = 0$ omdat $E_p = 0$ in O.

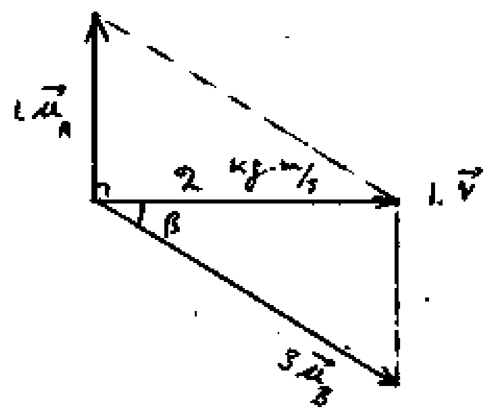
**3**

**a.** $\vec{v}_C = \frac{1}{4}\vec{v}$ (dus $v_C = 0{,}5$ m/s).

**b.** $E_k' = \frac{1}{2}.1.1{,}5^2 + \frac{1}{2}.3.0{,}5^2 = 1{,}5$ (J)

*of:* $E_k' = \frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 = \frac{1}{2}.0{,}75.v^2 = 1{,}5$ (J).

**c.** Impulsbehoud: $1.\vec{v} = 1.\vec{u}_A + 3.\vec{u}_B$; zie de figuur →

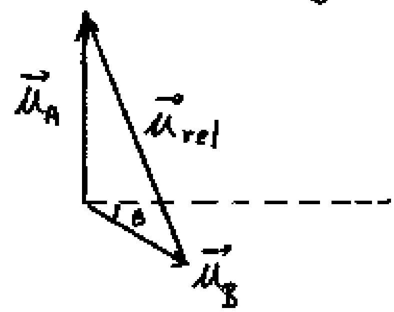



Uit die figuur blijkt: $u_A^2 + 4 = 9u_B^2$ ..... (1).

De botsing is elastisch, dus:
$\frac{1}{2}.1.2^2 = \frac{1}{2}.1.u_A^2 + \frac{1}{2}.3.u_B^2 \rightarrow 4 = u_A^2 + 3u_B^2$ ..... (2).

Uit (1) en (2) blijkt nu: $u_A = \sqrt{2}$ en $u_B = \sqrt{2/3}$ (m/s).

Uit de figuur blijkt: $\text{tg}\beta = u_A/2$
$\Rightarrow \text{tg}\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow \beta = 0{,}62$ rad (=35°).




**d.** Elastische botsing → $u_{rel} = v_{rel}$ → $u_{rel} = v = 2{,}0$ (m/s).

**Formulelijst bij tn 411 (Mechanica I voor TA[1]).**

Deze lijst wordt m.i.v. 1/1-'99 bij elk tentamen uitgereikt. De gebruiker dient op de hoogte te zijn van de gebruikte symbolen, alsook van de voorwaarden waaronder de verschillende formules geldig zijn. Formules waarvan wordt aangenomen dat iedereen ze kent (zoals de tweede wet van Newton: $\mathbf{F} = m\vec{a}$) zijn niet in deze lijst opgenomen. *N.B. Vetgedrukt symbool = vector.*

*Poolcoördinaten:*

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad \text{en} \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$$

*Eén deeltje:*

$\vec{a}_{tan} = \dot{v}\,\vec{e}_{tan}$; $a_n = v^2/R$

$\vec{v}_{rad} = \dot{r}\,\vec{e}_r$; $\vec{v}_{tr} = r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

Ongedempte harm. trilling: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{b}}$

$\mathbf{F}_{grav} = f(r)\,\vec{e}_r$ waarin $f(r) = (-Gm_1m_2)/r^2$

$F_{w_{st}} \leq \mu_{st}F_n$; $F_{w_k} = \mu_k F_n$

$P = \mathbf{F} \cdot \vec{v}$

$dE_k = \mathbf{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$

$\mathbf{F} = -\nabla E_p \rightarrow F_x = -\partial E_p/\partial x$ enz.!

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \quad \text{enz.}$$

$\mathbf{F} = f(r)\vec{e}_r \rightarrow f(r) = -dE_p/dr$

*Impuls- en krachtmoment:*

$\mathbf{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$; $\mathbf{M} = \vec{r} \times \mathbf{F}$; $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$

*Twee deeltjes:*

$E_k = E_k' + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v_C^2$

$E_k = \frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v_C^2$

$\vec{L}_C = \vec{r}_{12} \times \mu\vec{v}_{rel}$

*N deeltjes:*

$E_k = E_k' + \frac{1}{2}mv_C^2$

$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$