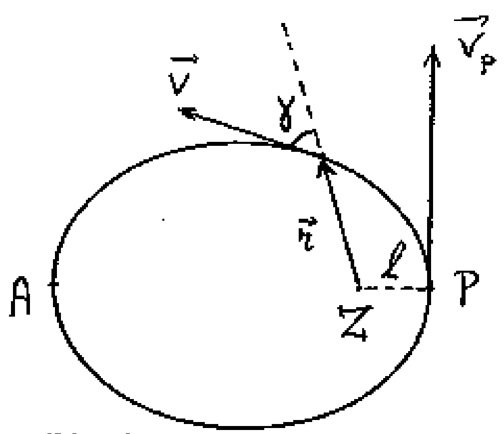
TENTAMEN tn 411 (MECHANICA-1 voor TA[1])

op vrijdag 14 januari 2000 van 14 - 17 uur. N.B. Vetgedrukte symbolen zijn *vectoren!*

Dit tentamen bestaat uit 3 vraagstukken, die elk evenveel waard zijn.

1 Een komeet (massa m) beweegt in het centrale krachtveld van de zon. Het krachtcentrum is aangeduid met de letter Z (het middelpunt van de zon). Voor de potentiële energie van de komeet in het gravitatieveld van de zon geldt:



$$E_p = \frac{-c}{r} \qquad \text{waarin } c = Gmm_Z.$$

De baan is een ellips; in **P** (perihelium) is de komeet het dichtst bij de zon; in A (aphelium) is hij er het verst vandaan. De afstand van P tot Z noemen we ℓ.
Voor de snelheid van de komeet bij het passeren van punt P geldt:

$$v_P = 1{,}28\sqrt{\frac{c}{m\ell}}.$$

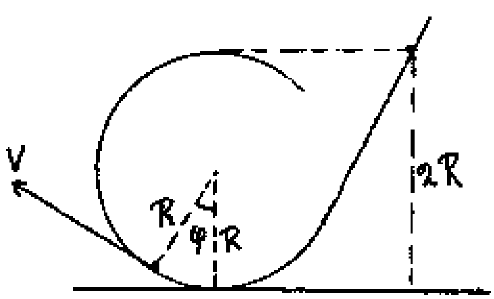
a. Enige tijd na het passeren van punt P is de afstand van de komeet tot Z aangegroeid tot 2ℓ (zie de vector $\vec{r}$ in de tekening). De snelheid van de komeet is daar $\vec{v}$.
Bewijs dat $v \approx 0{,}62\, v_P$.

b. De vector $\vec{v}$ is te ontbinden in een radiale component (in het verlengde van $\vec{r}$) en een transversale. Ga na, hoe groot de transversale component is, vergeleken met v_P.

c. Bereken γ (de hoek tussen $\vec{r}$ en $\vec{v}$).

d. Bereken de kromtestraal van de baan in het punt P (uitgedrukt in ℓ).

2 Een gladde, cirkelvormige, aan de binnenzijde open goot (straal **R**) is in een verticaal vlak opgesteld.
Een puntmassa m glijdt omlaag langs een hellend vlak dat aansluit op de goot (zie tekening).



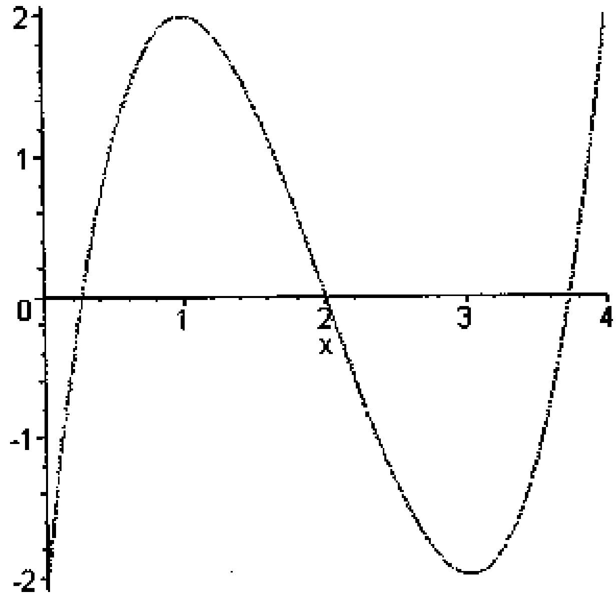
Men heeft de puntmassa zonder beginsnelheid losgelaten op hoogte 2R.
Stel dat nergens wrijvingskrachten optreden!

a. Bereken de grootte van de snelheid $\vec{v}$ als functie van de hoek φ (R en de valversnelling g komen ook in het antwoord voor).

b. Bewijs dat voor de grootte van de normale kracht F_n als functie van de hoek φ geldt:
$F_n = 2mg + 3mg\cos\varphi$.

c. Ga na, bij welke waarde van φ (tussen π/2 en π) de puntmassa het contact met de goot verliest.

3 Een puntmassa P (massa m = 0,50 kg) beweegt langs een rechte lijn (X-as). Hij bevindt zich in een krachtveld, waarin zijn potentiële energie is:
$E_p = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ (J); zie het diagram.



a. Bereken de kracht F_x als functie van x en ga na, voor welke positieve waarden van x de kracht van de oorsprong af gericht is.

b. Men plaatst P in het punt x=2 en laat hem daar zonder beginsnelheid los. P voert nu een *trilling* uit tussen het punt x=2 en een ander punt van de X-as. Bereken, welk punt dat is. Lukt dat niet, lees dan uit de grafiek af, welk punt dat is.

c. Men plaatst nu P in een ander punt van de X-as, en laat hem weer zonder beginsnelheid los. P voert weer een *trilling* uit. Ga na, tussen welke grenzen zijn totale mechanische energie (dat is $E_p + E_k$) dan ligt.

d. Men plaatst P nu in zijn stabiele evenwichtsstand (d.i. het punt x=3), geeft hem vanuit dat punt een zeer kleine uitwijking u (dat wil zeggen: $|u| \ll 3$), en laat hem dan zonder beginsnelheid los. De trilling die P nu uitvoert is nagenoeg harmonisch. Toon dat aan, gelet op het verband tussen F_x en u voor heel kleine $|u|$; bereken de trillingstijd.

TENTAMEN tn 411 van 14/1-2000: UITWERKING.

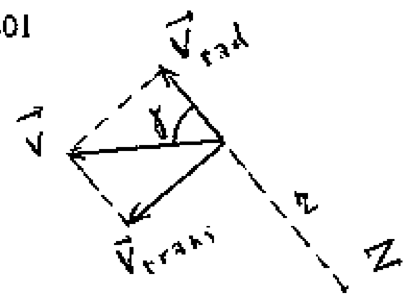
1

a. $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{c}{2\ell} = \frac{1}{2}mv_P^2 - \frac{c}{\ell} \rightarrow v = 0{,}799\sqrt{\frac{c}{m\ell}} = 0{,}624\,v_P$, afgerond $0{,}62\ v_P$.

b. Het impulsmoment t.o.v. Z is constant $\rightarrow \ell m v_P = 2\ell m v_{trans} \rightarrow v_{trans} = \frac{1}{2} v_P$.

c. $\sin\gamma = \frac{v_{trans}}{v} = \frac{0{,}5}{0{,}624} = 0{,}801$

$\Rightarrow \gamma = 0{,}93$ (rad).



d. $f(r) = \frac{-dE_p}{dr} = \frac{-c}{r^2}$

$\rightarrow$ in P is:

$$ma_n = \frac{c}{\ell^2},\quad a_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{v_P^2}{a_n} = 1{,}64\,\ell,\ \text{afgerond tot } 1{,}6\,\ell.$$

2

a. Het hoogteverschil tussen het beginpunt en het punt waar men de snelheid wil weten is

$R + R\cos\varphi$. $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}mv^2 = mg\,(R + R\cos\varphi)$ $\rightarrow$ $v = \sqrt{2gR(1+\cos\varphi)}$.

b. $\mathbf{F}_n + m\vec{g} = m\vec{a}$. Deze vectorvergelijking kan men apart uitschrijven voor de tangentiële en de normale componenten. Voor de normale componenten is het resultaat: $F_n - mg\cos\varphi = mv^2/R$. Volgens het antwoord op vraag a kunnen we hierin mv^2/R vervangen door $2mg(1+\cos\varphi)$. Doen we dit, dan krijgen we de gevraagde betrekking.

c. De puntmassa verliest het contact daar waar F_n juist gelijk is aan nul $\rightarrow$ $2 + 3\cos\varphi = 0$.
Hieruit volgt voor de gevraagde waarde van φ: $\varphi = \pi - \arccos(2/3) = 2{,}3$ rad.

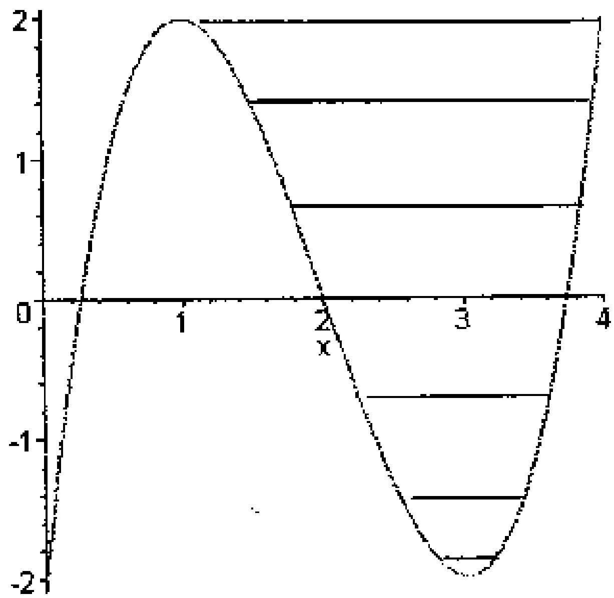
Z. O. Z.

3 a. $F_x = -dEp/dx = -3x^2 + 12x - 9$ (N).

Deze uitdrukking is positief voor $1 < x < 3$.

b. In het punt $x=2$ is $Ep = 0$ en $Fx > 0$ → P beweegt naar rechts tot hij een punt bereikt waar opnieuw $Ep = 0$.
De vergelijking $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$ heeft drie oplossingen waarvan er één al bekend is, namelijk: $x=2$. Deelt men links en rechts door $(x-2)$, wetende dat $x=2$ niet de gezochte oplossing is, dan houdt men een vierkantsvergelijking over: $x^2 - 4x + 1 = 0$.
Deze heeft twee oplossingen, waarvan er slechts één groter dan 2 is: $x = 2 + \sqrt{3} = 3,7$.

c. $E_p + E_k \geq E_p$ omdat E_k altijd positief of nul is.



De horizontale lijnen in het diagram geven enige mogelijke waarden van $E_p + E_k$ aan. De ondergrens wordt gevormd door de waarde die E_p heeft bij $x=3$ (dat is -2 J); de bovengrens door de waarde die E_p heeft bij $x=1$ (en dat is +2 J).

d. $x = 3 + u$ → $F_x = -3(3+u)^2 + 12(3+u) - 9 = -6u - 3u^2 \approx -6u$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{0,5}{6}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 1,8 \text{ (s)}.$$

Formulelijst bij tn 411 (Mechanica I voor TA[1]).

Deze lijst wordt m.i.v. 1/1-'99 bij elk tentamen uitgereikt. De gebruiker dient op de hoogte te zijn van de gebruikte symbolen, alsook van de voorwaarden waaronder de verschillende formules geldig zijn. Formules waarvan wordt aangenomen dat iedereen ze kent (zoals de tweede wet van Newton: $\mathbf{F} = m\vec{a}$) zijn niet in deze lijst opgenomen. *N.B. Vetgedrukt symbool = vector.*

Poolcoördinaten:

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \quad \text{en} \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r$$

Eén deeltje:

$\vec{a}_{tan} = \dot{v}\,\vec{e}_{tan}$; $\quad a_n = v^2/R$

$\vec{v}_{rad} = \dot{r}\,\vec{e}_r$; $\quad \vec{v}_{tr} = r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

Ongedempte harm. trilling: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{b}}$

$\mathbf{F}_{grav} = f(r)\,\vec{e}_r$ waarin $f(r) = (-Gm_1m_2)/r^2$

$F_{w_{st}} \le \mu_{st}F_n$; $\quad F_{w_k} = \mu_k F_n$

$P = \mathbf{F} \cdot \vec{v}$

$dE_k = \mathbf{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$

$\mathbf{F} = -\nabla E_p \;\rightarrow\; F_x = -\partial E_p/\partial x$ enz.!

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \quad \text{enz.}$$

$\mathbf{F} = f(r)\vec{e}_r \;\rightarrow\; f(r) = -dE_p/dr$

Impuls- en krachtmoment:

$\mathbf{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, $\quad \mathbf{M} = \vec{r} \times \mathbf{F}$; $\quad \mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$

Twee deeltjes:

$E_k = E_k' + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v_C^2$

$E_k = \frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v_C^2$

$\vec{L}_C = \vec{r}_{12} \times \mu\vec{v}_{rel}$

N deeltjes:

$E_k = E_k' + \frac{1}{2}m v_C^2$

$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$