TENTAMEN tn 411 (MECHANICA-1 voor TA[1])

op donderdag 31 augustus 2000 van 14 - 17 uur.

N.B. Vetgedrukte symbolen zijn vectoren! N.B. Geen kladpapier inleveren, s.v.p.!

Dit tentamen bestaat uit 3 vraagstukken, die elk evenveel waard zijn.

1 Een deeltje beweegt langs een rechte lijn (X-as). Op het tijdstip t=0 bevindt het zich in de oorsprong; voor zijn snelheid geldt dan: $v_x = v_0 > 0$.
Er werkt een vertragende kracht op het deeltje, die evenredig is met de snelheid, zodat $a_x = -bv_x$ waarin de constante $b > 0$. De differentiaalvergelijking (D.V.) waaraan v_x moet voldoen luidt dus:

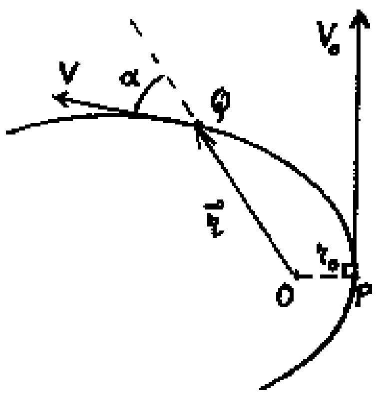
$$\frac{dv_x}{dt} + bv_x = 0. \qquad \text{De oplossing van deze D.V. is van de vorm} \quad v_x = Ae^{Bt}.$$

a. Druk A en B uit in de gegeven constanten v_0 en b.

b. Bereken de plaats x als functie van de tijd t .

c. Pas na oneindig lange tijd zou de snelheid geheel nul worden. De afgelegde weg zou dan toch niet oneindig lang zijn! Bereken, hoe lang die weg zou zijn.

2 Een puntmassa (massa m) bevindt zich in een centraal krachtveld. Voor zijn potentiële energie in dat krachtveld geldt: $E_p = -c/r$ waarin c een positieve constante is.
$\vec{r}$ is de plaatsvector t.o.v. het krachtcentrum O.



Op het tijdstip t=0 passeert de puntmassa het punt P; de waarde van r in punt P noemen we r_0. De snelheid waarmee de puntmassa het punt P passeert noemen we $\vec{v}_0$.

r_0 is de minimale waarde van r.

Voor de grootte van $\vec{v}_0$ geldt:

$$v_0 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{c}{mr_0}}.$$

a. Na enige tijd passeert de puntmassa punt Q. De plaatsvector $\vec{r}$ heeft daar de grootte $3r_0$. Bewijs dat de snelheid waarmee de puntmassa punt Q passeert twee keer zo klein is als v_0.

b. Bereken de hoek α die de snelheid in Q maakt met de plaatsvector.

c. Bereken de kromtestraal R (uitgedrukt in r_0) van de baan in punt P.

3

Een puntmassa van precies 1 kg beweegt in een krachtveld in een plat vlak (X-Y vlak). Voor de veldkracht geldt:

$F_x = -ax^by^2$; $F_y = -x^4y + 1$; $F_z = 0$. Hierin zijn a en b constanten.

a. Bereken a en b, als nog gegeven is dat het hier een *conserverend* krachtveld betreft.

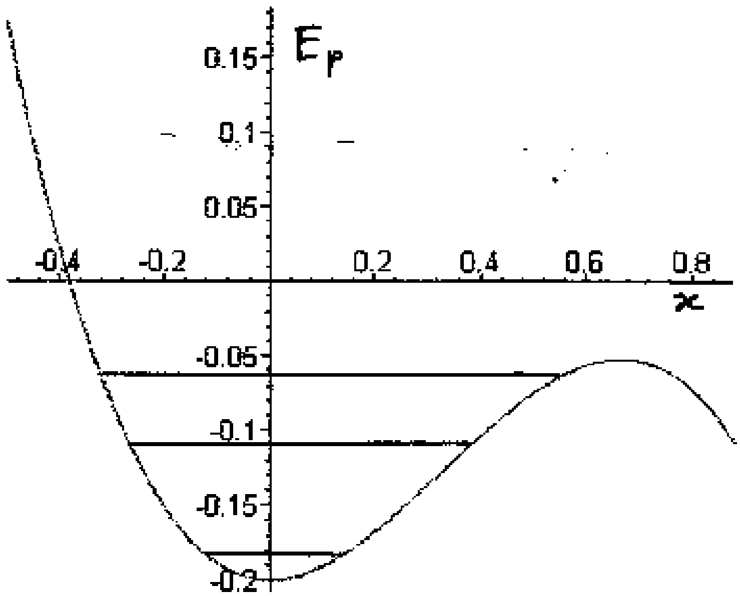
b. Bereken de potentiële energie E_p van de puntmassa als functie van x en y (stel $E_p = 0$ in de oorsprong O van het coordinatenstelsel).
(Wie vraag a niet heeft kunnen beantwoorden, laat de constanten a en b in het antwoord staan!)

c. Men plaatst de puntmassa in O en geeft hem een snelheid $\vec{v}_0$, zodanig dat de puntmassa na enige tijd het punt P (2; 4) passeert. Ga na, hoe groot v_0 minstens is.

TENTAMEN tn 411 van 26/6-2000: UITWERKING.

1 Lokaal maximum bij x_0. Berekening van x_0: $dE_p/dx = 0 \rightarrow x_0 = 0{,}67$ (m).
$E_p(0) = -0{,}2$ en $E_p(x_0) = -0{,}052$ (J).

a. Enige mogelijke energie-niveau's zijn in de figuur aangegeven. Voor het hoogst mogelijke energieniveau geldt blijkbaar:
E = -0,052 (J).
De *maximale* waarde van x, behorend bij dit niveau, is x_0. Om er achter te komen, hoe groot de *minimale* waarde van x, behorend bij dit niveau, is, berekenen we de oplossing van de vergelijking $-x^3 + x^2 - 0{,}2 = -0{,}052$ of ook: $-x^3 + x^2 - 0{,}148 = 0$ waarbij $x \neq x_0$:



Delen door $(x-x_0)$ geeft: $-9x^2 + 3x + 2 = 0$
$\Rightarrow (x + ⅓)(x - ⅔) = 0 \rightarrow x_{min} = -0{,}33$ (m).

Conclusie: $-0{,}33 < x < 0{,}67$ (m).

b. E is steeds > E(0) en < E(x_0).
$\rightarrow -0{,}2 < E \leq -0{,}052$ (J)

c. Evenwichtsstand: x = 0. "Kleine amplitude" betekent in dit geval dus dat |x| steeds klein is (d.w.z. $|x| << x_0$).

$F_x = -dE_p/dx = 3x^2 - 2x \rightarrow$ bij kleine amplitude is $F_x \approx -2x$.

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{b}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{0{,}05} = 1{,}4$ (s).

2 **a.** $E_p = \dfrac{-Gmm_z}{r}$. **b.** $\dfrac{v_0^2}{R} = \dfrac{Gm_Z}{R^2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{Gm_Z}{R}}$ ... (1).

c. Behoud van impulsmoment (t.o.v. Z) $\rightarrow 4{,}4\, Rmv_2 = Rmv_1 \rightarrow v_2 = v_1/4{,}4 = 0{,}23\, v_1$.

d. Wet van behoud van mechanische energie: $½mv_1^2 - Gmm_Z/R = ½mv_2^2 - Gmm_Z/(4{,}4R)$

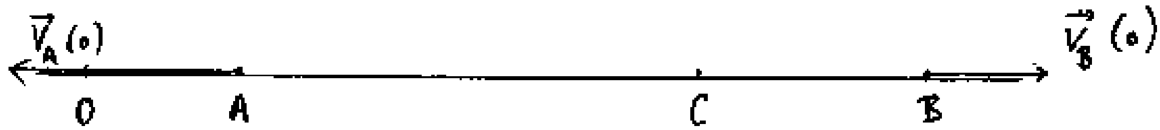
$\rightarrow ½mv_1^2 - ½mv_2^2 = \dfrac{Gmm_Z}{R}\left(1 - \dfrac{1}{4{,}4}\right)$ ofwel (met $v_2 = v_1/4{,}4$):

$0{,}474\, v_1^2 = 0{,}773\, Gm_Z/R \rightarrow v_1 = 1{,}28\sqrt{\dfrac{Gm_Z}{R}}$ ... (2).

Uit (1) en (2) blijkt nu: $v_1 = 1,28\ v_0$.

e. Voor de kromtestraal ρ in P geldt: $\rho_P = \dfrac{v_1^2}{a_n} = \dfrac{v_1^2}{\dfrac{Gm_Z}{R^2}} = \dfrac{v_1^2 R^2}{Gm_Z} = (1,28)^2 R = 1,6R.$

3 a. $\vec{v}_C = \left(\dfrac{m(-3)+2m.1,5}{3m}\right)\vec{i} = \vec{0}$; $x_C = \dfrac{m.2+2m.11}{3m} = 8\,(\mathrm{m})$.



b. $\frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 + \frac{1}{2}br^2 = \text{constant} \Rightarrow \frac{1}{2}br_{max}^2 = (\frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 + \frac{1}{2}br^2)$ op het tijdstip t=0.
Hierin is $\mu = \frac{2}{3}m$, dus, na delen door ½b: $r_{max}^2 = \frac{2}{3}.4.(3+1,5)^2 + (11-2)^2 = 54 + 81 = 135$
$\Rightarrow r_{max} = \sqrt{135} = 11,6$ (m).

Andere methode: Als $v_A = 0$, dan is ook $v_B = 0$ (want $\vec{v}_C = \vec{0}$).
Behoud van mechanische energie: $\frac{1}{2}.m.v_A^2 + \frac{1}{2}.2m.v_B^2 + \frac{1}{2}.b.r^2 = m.6,75 + b.40,5$,
$\Rightarrow \frac{1}{2}br_{max}^2 = m.6,75 + b.40,5$ dus na delen door ½b: $r_{max}^2 = 2(4\times 6,75 + 40,5) = 135$
$\Rightarrow r_{max} = \sqrt{135} = 11,6$ (m).

c. De bewegingsvergelijking kan aldus geschreven worden: $\mu\ddot{r} + br = 0$ waarin $\mu = \frac{2}{3}m$.

Vult men de gesuggereerde oplossing in, dan blijkt deze juist te zijn, *mits* we voor ω kiezen:

$\omega = \sqrt{\dfrac{3b}{2m}} = \frac{1}{4}\sqrt{6}$. Op het tijdstip t=0 is r=9 (m) $\Rightarrow 9 = r_{max} \sin\beta$

$\Rightarrow \beta = \arcsin\left(\dfrac{9}{\sqrt{135}}\right) = 0,886$ (rad).

d. r is maximaal zodra $\sin(\omega t + \beta) = 1$ dus voor $\omega t = \frac{1}{2}\pi - \beta = 0,685$.
$\Rightarrow$ Het gevraagde tijdstip is: $0,685/\omega = 1,12$ (s).

Formulelijst bij tn 411 (Mechanica I voor TA[1]).

Deze lijst wordt m.i.v. 1/1-'99 bij elk tentamen uitgereikt. De gebruiker dient op de hoogte te zijn van de gebruikte symbolen, alsook van de voorwaarden waaronder de verschillende formules geldig zijn. Formules waarvan wordt aangenomen dat iedereen ze kent (zoals de tweede wet van Newton: $\mathbf{F} = m\vec{a}$) zijn niet in deze lijst opgenomen. *N.B. Vetgedrukt symbool = vector.*

Poolcoördinaten:

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad \text{en} \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$$

Eén deeltje:

$\vec{a}_{tan} = \dot{v}\,\vec{e}_{tan}$; $\quad a_n = v^2/R$

$\vec{v}_{rad} = \dot{r}\,\vec{e}_r$; $\quad \vec{v}_{tr} = r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

Ongedempte harm. trilling: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{b}}$

$\mathbf{F}_{grav} = f(r)\,\vec{e}_r$ waarin $f(r) = (-Gm_1m_2)/r^2$

$F_{w_st} \leq \mu_{st}F_n$; $\quad F_{w_k} = \mu_k F_n$

$P = \mathbf{F}\cdot\vec{v}$

$dE_k = \mathbf{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p$

$\mathbf{F} = -\nabla E_p \rightarrow F_x = -\partial E_p/\partial x$ enz.!

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \text{ enz.}$$

$\mathbf{F} = f(r)\vec{e}_r \rightarrow f(r) = -dE_p/dr$

Impuls- en krachtmoment:

$\mathbf{L} = \vec{r}\times m\vec{v}$; $\quad \mathbf{M} = \vec{r}\times\mathbf{F}$; $\quad \mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$

Twee deeltjes:

$E_k = E_k' + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v_C^2$

$E_k = \frac{1}{2}\mu v_{rel}^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\,v_C^2$

$\vec{L}_C = \vec{r}_{12} \times \mu\vec{v}_{rel}$

N deeltjes:

$E_k = E_k' + \frac{1}{2}mv_C^2$

$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$