

Tentamen Mechanica II (TN4120TA¹⁺²)

16 juni 2003

9.00-12.00

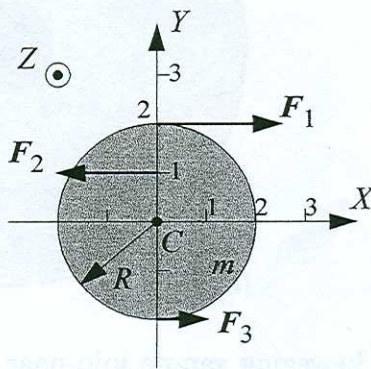
- Het tentamen bestaat uit drie opgaven
- Vermeld op elk blad uw naam en studienummer (7 cijfers)
- Het gebruik van syllabus, boeken e.d. is niet toegestaan

Opgave 1

In een zwaartekrachtvrije ruimte bevindt zich een cirkelvormige schijf (massa $m = 4 \text{ kg}$ en straal $R = 2 \text{ m}$) in rust. Op $t = 0$ beginnen hierop drie krachten te werken:

$$\vec{F}_1(x = 0, y = 2 \text{ m}) = 5 \vec{i} \text{ N}, \quad \vec{F}_2(x = 0, y = 1 \text{ m}) = -4 \vec{i} \text{ N}, \quad \vec{F}_3(x = 0, y = -2 \text{ m}) = 2 \vec{i} \text{ N}.$$

Zie ook onderstaande figuur voor grootten en werklijnen.

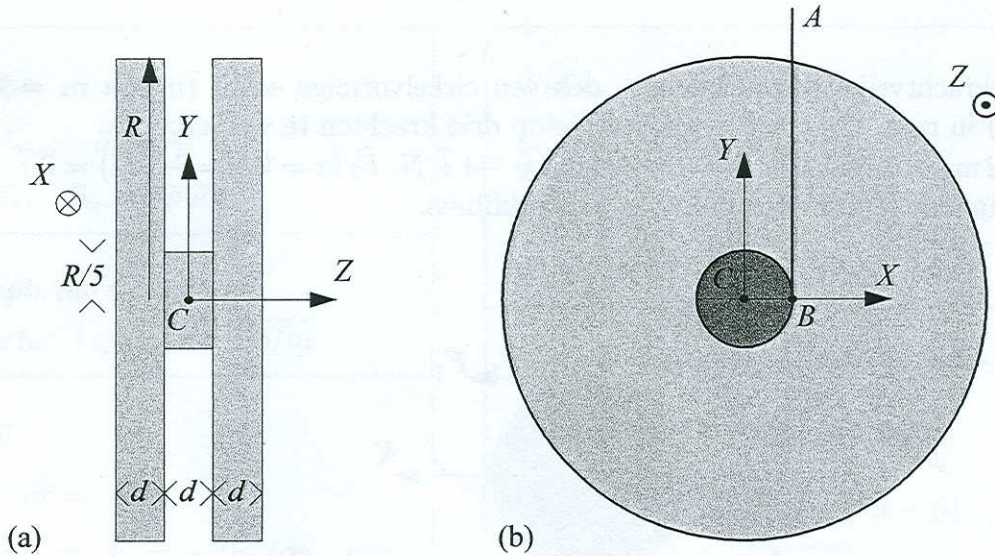


- a) Bewijs, in voldoende detail, dat voor het traagheidsmoment van de schijf t.o.v. de Z -as, door C , geldt $I_C = \frac{1}{2}mR^2$.
- b) Geef de grootte en de richting van de totale kracht \vec{F} .
Geef de grootte en de richting van het totale krachtmoment t.o.v. C : \vec{M}_C .
- c) Geef aan wat de werklijn is van \vec{F} .
Tekens \vec{F} met realistische richting en grootte in een figuur als bovenstaande.
- d) Bereken de volgende grootheden als functie van de tijd t :
de door schijf afgelegde weg $s(t)$,
de hoek $\varphi(t)$ waarover de schijf geroteerd is,
het impulsmoment $\vec{L}_C(t)$. Vermeld bij alle grootheden de eenheid.

Opgave 2

We beschouwen een jojo bestaande uit 2 schijven, elk met dikte d , straal R en massa m_s , en een asje daar tussenin, met dikte d , straal $R/5$ en massa m_a . Zie fig.a voor een dwarsdoorsnede loodrecht op de X -as.

Het touwtje van de jojo is gedeeltelijk om het asje gewonden. De rotatie-as van de jojo is evenwijdig aan de Z -as. Het asje en de twee schijven zijn van hetzelfde materiaal gemaakt.



- a) Welke twee krachten bepalen de beweging van de jojo naar beneden? Geef deze ook weer in een tekening als fig.b, een projectie van de jojo op het XY -vlak. Welke van de twee krachten is de grootste? Beargumenteer dit zonder de berekening uit te voeren.

- b) Toon aan, dat het traagheidsmoment van het asje $I_{z,C}^a$, t.o.v. de Z -as door C , minstens duizend maal kleiner is dan die van de twee schijven samen, $I_{z,C}^s$. Zie opgave 1a voor het traagheidsmoment van een schijf of cilinder: $I_{z,C} = \frac{1}{2}mR^2$.

We verwaarlozen de bijdrage van het asje tot het totale traagheidsmoment van de jojo, $I_{z,C}$. Ook verwaarlozen wij de bijdrage van het asje tot de totale massa van de jojo, m :

$$m_{\text{tot}} = 2m_s + m_a \simeq 2m_s = m.$$

- c) Bereken de versnelling a_C van de jojo en de spankracht F_s in het touwtje, beide in termen van de versnelling van de zwaartekracht g .
- d) Hoe lang doet de jojo er over om, vanuit stilstand, 1 meter te dalen? ($g = 10 \text{ m s}^{-2}$)

Opgave 3

Van een zwak gedempte trilling is gegeven dat voor $t = 0$ de uitwijking nul is, $x = 0$, en dat voor $t = \pi/(2\omega_1)$ geldt $x = A/3$. De symbolen hebben dezelfde betekenis als in de formulelijst.

- Bereken de fasehoek β , inclusief het teken.
Bewijs dat voor α geldt: $\alpha = (2\omega_1/\pi) \ln 3$.
- Bereken de snelheid $v(t=0)$ in termen van A en ω_1 .
Bereken de snelheid $v(t = \pi/(2\omega_1))$ in termen van A en α .
- Druk ω_1 uit in de "basisgrootheden" van de trilling: m , r en b .
Wat stellen deze grootheden voor?

Formulelijst bij TN4120TA (Mechanica II).

Deze lijst wordt bij elk tentamen uitgereikt. U dient op de hoogte te zijn van de betekenis van de gebruikte symbolen, alsook van de voorwaarden waaronder de verschillende formules geldig zijn. Triviale formules, zoals de tweede wet van Newton, zijn niet in deze lijst opgenomen.

<p><i>Eén deeltje:</i></p> $\vec{a}_{\text{tan}} = \dot{v} \vec{e}_{\text{tan}}; \quad \vec{a}_{\text{n}} = \frac{v^2}{R} \vec{e}_{\text{n}}$ $\vec{v}_{\text{rad}} = \dot{r} \vec{e}_r; \quad \vec{v}_{\text{tr}} = r\dot{\varphi} \vec{e}_{\varphi}$	<p><i>Vlakke beweging:</i></p> $\sum \vec{F} = m\vec{a}_C; \quad \vec{M}_C = \dot{\vec{L}}_C$ $E_k = \frac{1}{2} I_A \omega^2$ $E_k = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} m v_C^2$
<p><i>Ongedempte harm. trilling:</i></p> $x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{b/m}$	<p><i>Lineair gedempte en gedwongen trillingen:</i></p> $\omega_0 = \sqrt{\frac{b}{m}}, \quad \alpha = \frac{r}{2m}$
<p>$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$</p> <p>$dE_k = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$</p> <p>$\vec{F} = -\nabla E_p \Rightarrow F_x = -\partial E_p / \partial x \quad \text{enz.}$</p> <p><i>Impuls- en krachtmoment:</i></p> $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}; \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}; \quad \vec{M} = \dot{\vec{L}}$	<p>Zwak: $x = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t + \beta)$</p> <p style="padding-left: 20px;">met $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$</p> <p>Kritiek: $x = (At + B) e^{-\alpha t}$</p> <p>Sterk: $x = (A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{-\omega_1 t}) e^{-\alpha t}$</p> <p style="padding-left: 20px;">met $\omega_1 = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$</p> <p>$\tau = \frac{1}{2\alpha}; \quad Q = \omega_1 \tau$</p> <p>$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2} \quad \text{bij} \quad Q > \frac{1}{2}$</p>
<p><i>N deeltjes:</i></p> $\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$	
<p><i>Lichamen:</i></p> $L_z = I\omega_z$ $I = \int (r')^2 dm$ <p>$P = M_z \omega_z \quad (\text{star lichaam})$</p> <p>$d(\frac{1}{2} I \omega^2) = M_z d\varphi \quad (\text{star lichaam})$</p> <p>$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \quad (\text{plat lichaam})$</p> <p>$I = I_C + m s^2 \quad (\text{Steiner})$</p> $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{b'}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{smg}}$	