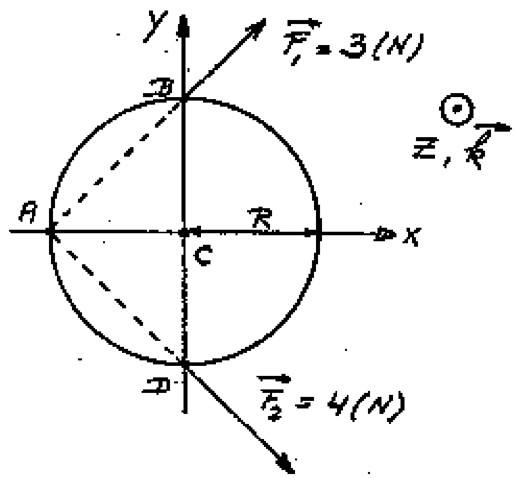
Tentamen TN4120TA, Mechanica II voor TA

26 maart 2001, 14.00 u - 17.00 u

Waardering: 1: 30 pt; 2: 35 pt; 3: 35 pt.

1.



In een zwaartekracht-vrije ruimte bevindt zich een ronde schijf met een massa m van 1 (kg), en een straal R van 0.1 (m).
De dikte is verwaarloosbaar klein t.o.v. R. C is het massamiddelpunt.
Op de schijf werken twee krachten van 3 (N) en 4 (N), met dragers resp. AB en AD. A ligt op de x-as, B en D op de y-as; A, B en D liggen op de rand van de schijf.
Gegeven: $I_{z,C} = \frac{1}{2} mR^2$.

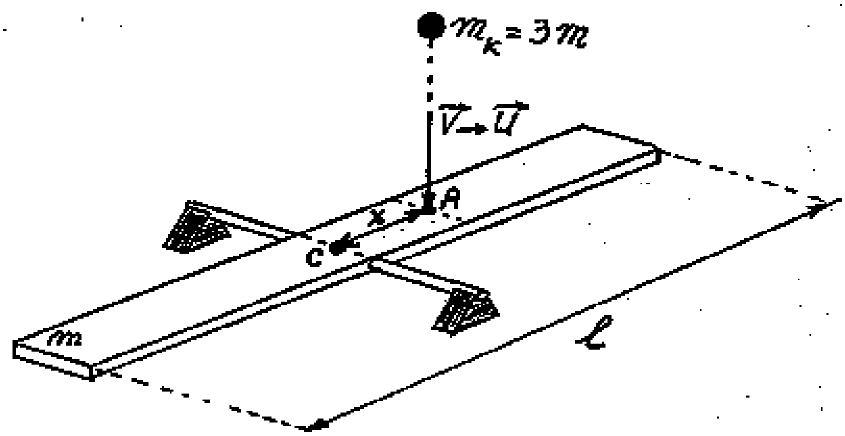
a. Bereken de waarde van het traagheidsmoment $I_{z,C}$ van de schijf.
Bereken de waarde van $\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$; geef de richting en grootte ervan aan in een figuur.

b. Op $t = 0$ is de schijf in rust. Bereken de snelheid v_c van het massamiddelpunt C en de kinetische <u>translatie</u>-energie $E_{k,tr}$, beide als functie van de tijd.

c. Beide krachten oefenen een krachtmoment uit t.o.v. C. Noem deze momenten $\vec{M}_{1,C}$ en $\vec{M}_{2,C}$. Het totale krachtmoment $\vec{M}_{tot,C}$ is gelijk aan de som van $\vec{M}_{1,C}$ en $\vec{M}_{2,C}$. Dit hoef je <u>niet</u> te bewijzen! Bereken de grootte en de richting van $\vec{M}_{tot,C}$. Bereken hieruit $\dot{\omega}$ van de schijf in formule en numeriek, en vervolgens ω als functie van t.

d. Bereken de kinetische <u>rotatie</u>-energie $E_{k,rot}$ als functie van de tijd t.

2.



Een dunne lat heeft een lengte ℓ en massa m. Door het massacentrum C is een vast, ondersteund asje gestoken; de lat ligt precies horizontaal in evenwicht.
Een kogeltje met massa $m_k = 3m$ valt met snelheid v op een punt A van de lat, op afstand x van C. De botsing is volkomen elastisch, d.w.z. tijdens de botsing is de kinetische energie E_k behouden. De kogel heeft na de botsing een snelheid u.

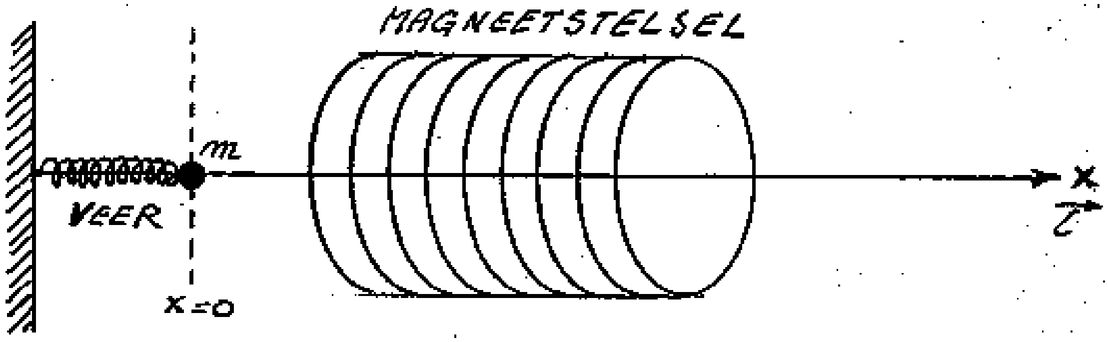
a. Wat gebeurt er met C tijdens de botsing? Is de impuls van <u>het systeem kogel + lat</u> tijdens de botsing behouden? Verklaar je antwoord.
Is $\vec{L}_A$ van het systeem behouden? En $\vec{L}_C$? Beredeneer ook hier je antwoorden.

b. Onmiddellijk na de botsing roteert de lat met hoeksnelheid ω rond de as, en is de snelheid van de kogel: u.
Bereken nu eerst u, uitgedrukt in ω, ℓ en x. Gegeven: $I_C = \frac{1}{12} m\ell^2$.

c. Laat zien dat $u = 0$ als $x = \frac{1}{6}\ell$.
Druk <u>voor dit geval</u> ω uit in v en ℓ.

d. Bereken de grootte van de krachtstoot (in m en v) die <u>de lat</u> tijdens de botsing in C ondervindt als $u = 0$.
Geef ook de richting ervan aan.
N.B. Dit deel is ook op te lossen zonder eerst a t/m c uit te werken!

3.



$\longrightarrow \vec{F} = F\vec{i}, \; F>0$, CONSTANT.

In de zwaartekracht-vrije ruimte van vraagstuk 1 (bijv. in een satelliet) is ook een massa m via een veer met veerconstante b aan een vaste wand bevestigd. Een slim uitgedacht magneetveld zorgt voor een kracht $\vec{F}$ in de x-richting die constant is, en onafhankelijk van x. Zie ook de figuur. De wrijvingsconstante is r. De massa gaat een gedempte trilling uitvoeren. Op $t = 0$ is $x = 0$, en $\dot{x} = 0$.

a. Schrijf de bewegingsvergelijking op, met m, b, r en F als parameters.

b. Na lange tijd is de massa tot stilstand gekomen bij zekere $x = x_e$, met $x_e > 0$. Druk x_e uit in enige van de onder *a* genoemde parameters.

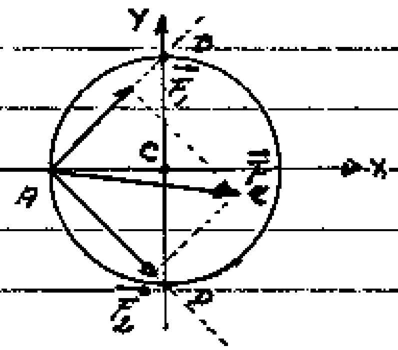
c. Geef de algemene (particuliere + homogene) oplossing van de bewegingsvergelijking; d.w.z. los $x(t)$ op.

d. De amplitude A en de fasehoek β kunnen nu worden opgelost uit de twee beginvoorwaarden en $x(t)$.
Schrijf de twee betreffende vergelijkingen in A en β op, en los deze op voor het geval dat $\alpha \ll \omega_0$. Gegeven: $\cos(\varphi + \pi) = -\cos(\varphi)$.
Laat zien dat dan: $x(t) = \frac{F}{b}\left\{ 1 - e^{-\alpha t} \cos(\omega_1 t)\right\}$

e. Tijdens de trilling zijn er tijdstippen waarvoor de snelheid van de massa 0 is. Nummer deze tijden: t_n, met n = 0, 1, 2, 3, ...
Druk t_n uit in n, π en ω_1.
Wat is in goede benadering (weer: als $\alpha \ll \omega_0$!) x_n als n = 1, en wat wordt x_n als $n \to \infty$ (dus ook voor $t \to \infty$)?

TENTAMEN TN4120TA, MECHANICA II
26 MAART 2001, UITWERKINGEN

1. a. $I_{z,c} = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (0,1)^2 = 5\times10^{-3}$ (kg m²).



$F_{res} = F_2 = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ (N).

b. $\vec{F}_{res} = m \frac{d\vec{v}_c}{dt} \Rightarrow \frac{dv_c}{dt} = \frac{F_{res}}{m} = 5$ (m/s²) $\Rightarrow v_c = 5t + C$ (m/s)

met $v_c = 0$ op $t=0$: $\underline{v_c = 5t \text{ (m/s)}} \Rightarrow E_{K,tr} = \frac{1}{2} m v_c^2 = \underline{12,5 t^2 \text{ (J)}}$

c. Voor zowel $\vec{F}_1$ als $\vec{F}_2$ is de arm t.o.v. C: $\frac{1}{2} R\sqrt{2}$.

Dus:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{M}_c(1) = -3 \cdot \frac{1}{2} R\sqrt{2}\, \vec{k} \\ \vec{M}_c(2) = +4 \cdot \frac{1}{2} R\sqrt{2}\, \vec{k} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \vec{M}_c(tot) = \frac{1}{2} R\sqrt{2}\, \vec{k} \\ \text{Grootte: } \frac{1}{2} R\sqrt{2} = \underline{5\times10^{-2}\sqrt{2} \text{ (N m)}} \end{array}$$

$\vec{M}_c = \dot{\vec{L}}_c$. Z-component: $M_{c(z)} = I_{cz}\,\dot{\omega} \Rightarrow \underline{\dot{\omega}} = \frac{M_c}{I_{cz}} =$

$= \frac{5\times10^{-2}\sqrt{2}}{5\times10^{-3}} = \underline{10\sqrt{2} \text{ (rad/s}^2)}$.

d. Uit c) volgt: $\underline{\omega = 10\sqrt{2}\cdot t \text{ (rad/s)}}$

$E_{K,rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 5\times10^{-3} (10\sqrt{2}t)^2 \text{ (J)} = \underline{0,5 t^2 \text{ (J)}}$

#

2. a. C blijft bewegingloos. $\vec{P}_{tot}$ is niet behouden, omdat er een (externe!) krachtstoot vanuit de as op-

$\vec{L}_A$ is niet behouden, vanwege deze krachtstoot.
$\vec{L}_C$ is wel behouden, omdat die krachtstoot een werklijn heeft die door C gaat.

b. E_K en $\vec{L}_C$ zijn behouden; los hieruit de 2 onbekenden ω en u op:

E_K behouden: $\frac{1}{2}\cdot 3mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 3mu^2 + \underbrace{\frac{1}{2} I_C\,\omega^2}_{\frac{1}{12}ml^2\omega^2}$ $\div \frac{3}{2}m$:

$v^2 - u^2 = \frac{1}{36}l^2\omega^2$ of: $(v+u)(v-u) = \frac{1}{36}l^2\omega^2$ (1)

$\vec{L}_C$ behouden: L_C behouden $\Rightarrow 3mvx = 3mux + \underbrace{I_C\,\omega}_{\frac{1}{12}ml^2\omega}$ $\div 3mx$

$v - u = \frac{1}{36}\frac{l^2}{x}\omega$ (2)

$\frac{(1)}{(2)}$: $v + u = \omega x$ (3)   (3)−(2): $2u = \omega\left(x - \frac{1}{36}\frac{l^2}{x}\right)$

of: $u = \frac{\omega x}{2}\left(1 - \frac{1}{36}\frac{l^2}{x^2}\right)$

c. $u = 0$ als $\frac{1}{36}\frac{l^2}{x^2} = 1$, d.w.z. als $x = \frac{1}{6}l$.

met bijv. (3) en $x = \frac{l}{6}$ $(u = 0)$: $v = \omega\cdot\frac{l}{6} \Rightarrow \omega = \frac{6v}{l}$

d. Bij de botsing is $\vec{v}_C$ van de lat $= \vec{0}$, en blijft $\vec{0}$.
Dus: voor de lat is $\Delta\vec{p} = \vec{0}$. $\Delta\vec{p} = \int\sum_i \vec{F}_i\,dt$
$\Rightarrow \int\vec{F}\,dt$ (kogel op lat) +
+ $\int\vec{F}\,dt$ (as op lat) = 0.
De eerste term is $-\Delta\vec{p}$ (kogel). Waarde: $3mv$. Richting: $\downarrow$
Dus: de krachtstoot van de as op de lat is ook $3mv$.

3. a. $\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$, dus: $m\ddot{x} = -r\dot{x} - bx + F$

$$\underline{m\ddot{x} + r\dot{x} + bx = F}$$

b. Dan is $\ddot{x} = 0$ en $\dot{x} = 0$, dus $\underline{x_e = \frac{F}{b}}$.

c. $\underline{x = \frac{F}{b} + Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \beta)}$, met $\alpha = \frac{r}{2m}$ en $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$
$(\omega_0^2 = b/m)$

d. $t = 0 \leftrightarrow x = 0 \rightarrow \frac{F}{b} + A\cos\beta = 0 \quad (1)$

$$\dot{x} = -Ae^{-\alpha t}\{\alpha\cos(\omega_1 t + \beta) + \omega_1\sin(\omega_1 t + \beta)\}$$

$t = 0 \leftrightarrow \dot{x} = 0 \rightarrow \alpha\cos\beta + \omega_1\sin\beta = 0 \Rightarrow \tan(\beta) = -\frac{\alpha}{\omega_1} \quad (2)$

Als $\alpha \ll \omega_0$, is ook $\alpha \ll \omega_1$, dus $\tan(\beta) \approx 0$
D.w.z. $\beta = 0$ of π $(-\pi \equiv \pi) \Rightarrow \cos\beta = 1$ of -1

(1) geeft: $\cos\beta = -\frac{F}{bA}$, dus $< 0 \Rightarrow \cos\beta = -1 = -\frac{F}{bA}$

of: $A = \frac{F}{b}$.

Dan is: $x(t) = \frac{F}{b} + \frac{F}{b}e^{-\alpha t}\underbrace{\cos(\omega_1 t + \pi)}_{= -\cos(\omega_1 t)}$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = \frac{F}{b}\{1 - e^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t)\}} \quad (3)$$

e. Uit (3): $\dot{x}(t) = \frac{F}{b}e^{-\alpha t}\{\alpha\cos(\omega_1 t) + \omega_1\sin(\omega_1 t)\}$

$\dot{x}(t) = 0$ als $\tan(\omega_1 t) = -\frac{\alpha}{\omega_1} \approx 0 \Rightarrow \underline{\omega_1 t = n\pi}$
$n = 0, 1, 2, \ldots$

$n = 0 \leftrightarrow t = 0$, dus de begintoestand.

$n=1$: $t_1 = \frac{\pi}{\omega_1}$, dus met (3): $x_1(t) = \frac{F}{b}\Big\{1 - \underbrace{e^{-\frac{\alpha\pi}{\omega_1}}}_{\approx 1} \underbrace{\cos(\pi)}_{-1}\Big\}$

zodat $\underline{x_1(t_1) \approx \frac{2F}{b}}$

Algemeen: $x_n(t) = \frac{F}{b}\Big\{1 - \underbrace{e^{-\frac{n\alpha\pi}{\omega_1}}}_{\substack{\to 0 \text{ als}\\ n\to\infty}} \underbrace{\cos(n\pi)}_{+1 \text{ of } -1}\Big\}$

dus $\underline{\lim_{n\to\infty} x_n(t_n) = \frac{F}{b}}$.

en dit is natuurlijk gelijk aan x_e (zie (b)).

#

Formulelijst bij tn 412 (Mechanica II voor TA²).

Deze lijst wordt m.i.v. 1/1-'99 bij elk tentamen uitgereikt. De gebruiker dient op de hoogte te zijn van de gebruikte symbolen, alsook van de voorwaarden waaronder de verschillende formules geldig zijn. Formules waarvan wordt aangenomen dat iedereen ze kent (zoals de tweede wet van Newton: $\mathbf{F} = m\bar{a}$) zijn niet in deze lijst opgenomen. *N.B. Vetgedrukt symbool = vector.*

Eén deeltje:

$\bar{a}_{tan} = \dot{v}\,\bar{e}_{tan}$; $a_n = v^2/R$

$\bar{v}_{rad} = \dot{r}\,\bar{e}_r$; $\bar{v}_\varphi = r\dot{\varphi}\,\bar{e}_\varphi$

Ongedempte harm. trilling: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{b}}$

$P = \mathbf{F} \cdot \bar{v}$

$dE_k = \mathbf{F} \cdot d\bar{r} = -dE_p$

$\mathbf{F} = -\nabla E_p \rightarrow F_x = -\partial E_p/\partial x$ enz.!

Impuls- en krachtmoment:

$\mathbf{L} = \bar{r} \times m\bar{v}$, $\mathbf{M} = \bar{r} \times \mathbf{F}$; $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$

N deeltjes:

$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$

Lichamen:

$L_z = I\omega_z$

$I = \int (r')^2\, dm$

$P = M_z\omega_z$ (star lichaam)

$d(\tfrac{1}{2}I\omega^2) = M_z d\varphi$ (id.)

$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$ (plat lichaam)

$I = I_C + ms^2$ (Steiner)

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{b'}}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{smg}}$

Vlakke beweging:

$\sum \mathbf{F} = m\bar{a}_C$ en $\mathbf{M}_C = \dot{\mathbf{L}}_C$

$E_k = \tfrac{1}{2}I_A\omega^2$

$E_k = \tfrac{1}{2}I_C\omega^2 + \tfrac{1}{2}mv_C^2$

Lineair gedempte en gedwongen trillingen:

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{b}{m}}$ en $\alpha = \dfrac{r}{2m}$

Zwak: $x = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \beta)$

waarin $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

Kritiek: $x = (At + B)\,e^{-\alpha t}$

Sterk: $x = \left(A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{-\omega_1 t}\right) e^{-\alpha t}$

waarin $\omega_1 = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

$\tau = \dfrac{1}{2\alpha}$; $Q = \omega_1\tau$

$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$ bij $Q > \tfrac{1}{2}$