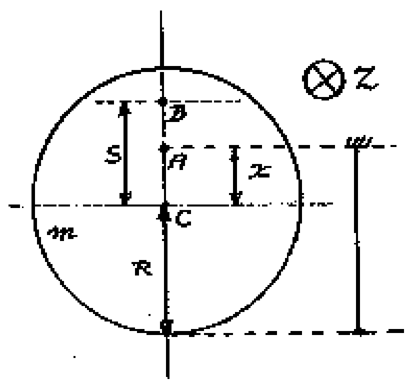
Tentamen tn412, Mechanica II voor TA

21 augustus 2000, 14.00 u - 17.00 u

Waardering: 1: 30 pt.; 2: 30 pt.; 3: 40 pt.

1.



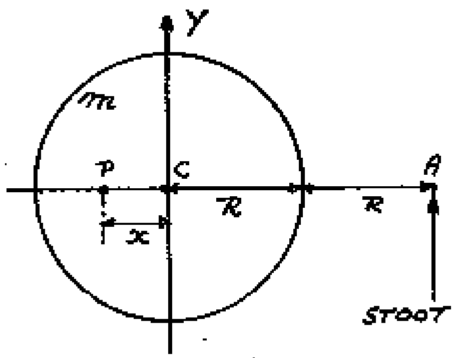
Van een cirkelvormige, dunne schijf is de massa m homogeen verdeeld. Zijn straal is R.
We laten de schijf *kleine* schommelingen maken rond assen die loodrecht op de schijf staan evenwijdig aan de z- as, en die gaan door punten loodrecht boven C. A en B zijn dus voorbeelden van punten van de schijf waardoor zo'n as kan gaan.

a. Druk I_{zA} uit in m, R en x, als x de afstand is tussen A en C, en als gegeven is dat $I_{zC} = \frac{1}{2} mR^2$.

b. Naast de schijf wordt een mathematische slinger opgehangen, die precies dezelfde lengte heeft als de afstand tussen A en de onderkant van de schijf.
Hoe groot moet x (uitgedrukt in R) zijn opdat de schijf en de mathematische slinger dezelfde slingertijd hebben?

c. Er is ook een punt B, zó dat de slingertijd van de schijf minimaal is. Hoe groot is de afstand s (s = BC), uitgedrukt in R?

2.



Gegeven: Een massieve bol met massa m en straal R. Hierin is een massaloos staafje geschroefd, waarvan het verlengde door het middelpunt C van de bol gaat. De bol is in rust.
Nu wordt in het punt A, op afstand $2R$ van C, een krachtstoot gegeven, loodrecht op het staafje.

a. Is $\vec{L}_C$ behouden? En $\vec{L}_A$? Beredeneer je antwoorden.
Geef de richting van $\vec{v}_c$ en van ω aan in de figuur.

b. Het percussiepunt P ligt op een afstand $x = \alpha R$ van C. Bereken α.
Gegeven: $I_{y,C} = \frac{2}{5} mR^2$.

c. Als de waarde van de krachtstoot $\int \vec{F}.dt$ gelijk is aan S, druk ω dan uit in S, m en R.
!! Als je α niet hebt kunnen oplossen, druk ω dan uit in α, S, m en R. !!

3.

Van een gedempte trilling is gegeven dat de trillende massa m = 1 kg is, de veerconstante b = 100 N/m. en de constante α = 1 (...).
Er zijn geen andere krachten.

a. Geef de eenheid van α.
Bereken de constanten r, ω_0 en ω_1; geef ook hiervan de eenheden.

b. Schrijf de bewegingsvergelijking op, en geef voor de beschouwde trilling de algemene oplossing $x(t)$.
Wat is hierin de amplitude? Hoe groot is deze op t = 0?

c. Met welke factor is de amplitude afgenomen na 3 seconden?

d. *Gegeven:* op t = 0 is de uitwijking x = 0,1000 m, en de snelheid $\vec{v} = \vec{0}$.
Bereken zowel de fasehoek β als de waarde van de amplitude op t = 0.
Hoeveel is op t = 0 deze amplitude groter dan x ?
Let op!: het antwoord "0" is niet goed! Neem dus een voldoende aantal decimalen mee.
Teken in een figuur $x(t)$ voor kleine t. Teken ook (gestippeld) de amplitude, en geef duidelijk het hierboven berekende verschil aan.

e. Na korte tijd t_0 is voor het eerst de uitslag $x(t)$ gelijk aan de amplitude. Bereken de waarde van t_0, en geef in de reeds geschetste figuur aan waar t_0 ligt.

TENTAMEN tn 412, MECHANICA II VOOR TA2.

21 AUGUSTUS 2000.

UITWERKINGEN.

1. a. Steiner: $I_A = I_C + ms^2$; hier: $I_A = I_C + mx^2 = m(\frac{1}{2}R^2 + x^2)$.

b. Voor de slinger geldt: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R+x}{g}}$ (1)

Voor de schijf: $T_A = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{smg}} = 2\pi\sqrt{\frac{m(\frac{1}{2}R^2+x^2)}{xmg}}$ (2).

(1)=(2) als $R+x = \frac{\frac{1}{2}R^2+x^2}{x} \rightarrow xR + x^2 = \frac{1}{2}R^2 + x^2 \rightarrow \underline{x = \frac{1}{2}R}$

c. $T_B = 2\pi\sqrt{\frac{I_B}{smg}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mR^2+ms^2}{smg}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}R^2+s^2}{sg}}$

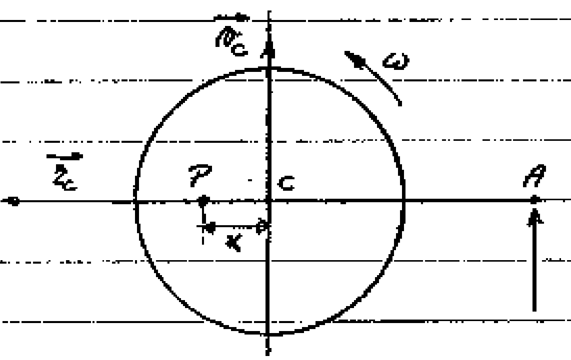
T_B is minimaal als $\frac{dT_B}{ds} = 0$, d.w.z. als $\frac{d}{ds}\left(\frac{\frac{1}{2}R^2+s^2}{s}\right) = 0$

Dit leidt tot: $\underline{\underline{s = \frac{1}{2}R\sqrt{2}}}$

#

2. a. $\vec{L}_C$ is niet behouden, omdat $\vec{M}_C \neq \vec{0}$ is.

$\vec{L}_A$ is behouden omdat de krachtstoot door het punt A gaat, en dus is $\vec{M}_A = \dot{\vec{L}}_A = \vec{0}$.



b. Omdat de bol van tevoren stil ligt is niet alleen $\dot{\vec{L}}_A = \vec{0}$, maar dan ook $\vec{L}_A$ = constant $= \vec{0}$

dus:

$\vec{L}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C = 0$. In getal waarde:

$L_C = m r_C v_C \Rightarrow I_C\omega = 2mR v_C$:

$\frac{2}{5}mR^2\omega = 2mR v_C \Rightarrow v_C = \frac{1}{5}\omega R$

stoot roteert het systeem rond P.

Dan is $v_C = \omega x$

Dit samen met $v_C = \frac{1}{5}\omega R$ levert: $\underline{x = \frac{1}{5}R} \Rightarrow \underline{\alpha = \frac{1}{5}}$

c. Bewegingsvergelijking voor de bal: $\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Dit geeft: $\Delta\vec{p} = \int_\tau \vec{F}\,dt$

Omdat de bal eerst stil lag is $\Delta\vec{p} = \vec{p}$; omdat de stoot // de z-as plaatsvindt, is er maar één component p_z.

Dan: $p_z = \int F\,dt = S$

$p_z = mv_0$, dus $S = mv_C = m\omega x = m\omega\alpha R$.

Hieruit:

$$\underline{\omega} = \underline{\frac{S}{\alpha m R}} = \underline{\frac{5S}{mR}}$$

#

3. a. αt staat in een exponent, dus de eenheid van $\alpha = s^{-1}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10\ s^{-1}$

$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{100-1} = 9{,}950\ s^{-1}$

$r = 2m\alpha = 2.1.1 = 2\ kg\,s^{-1}$.

b. $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$.

Omdat $\omega_0^2 > \alpha^2$ is de trilling zwak gedempt; de oplossing is dan:

$$x = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \beta) \qquad (1)$$

De amplitude is $Ae^{-\alpha t}$; deze $= A$ voor $t = 0$.

c. $\frac{(Ae^{-\alpha t})_{t=3}}{(Ae^{-\alpha t})_{t=0}} = e^{-3} = \frac{1}{20}$, dus de amplitude is na 3 s. 20 x zo klein geworden.

d. $v = \dot{x} = Ae^{-\alpha t}\{-\alpha\cos(\omega_1 t + \beta) - \omega_1\sin(\omega_1 t + \beta)\} \qquad (2)$

$t=0 \leftrightarrow x=0{,}1000$ met (1): $0{,}1 = A\cos\beta$

$t=0 \leftrightarrow v=0$ met (2): $0 = -A(\alpha\cos\beta + \omega_1\sin\beta) \Rightarrow \tan\beta = -\frac{\alpha}{\omega_1}$

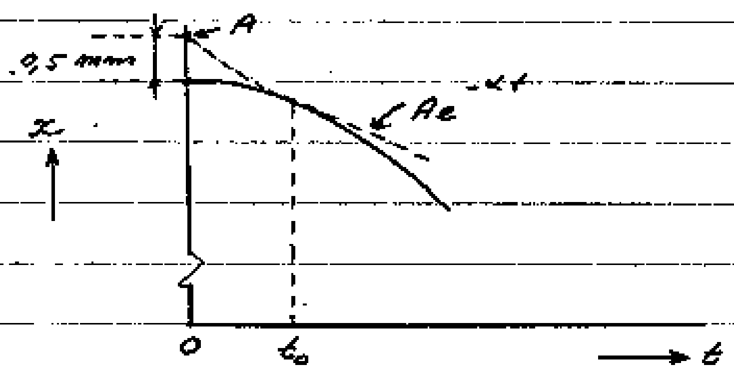
dus: $\tan\beta = \frac{-1}{9{,}950} = -0{,}1005 \Rightarrow \underline{\beta = -0{,}1002 \text{ rad}}$ $(-5{,}74^\circ)$

en $\underline{A} = \frac{0{,}1}{\cos\beta} = \underline{0{,}10050 \text{ m}}$.

Op $t=0$ is de amplitude $(Ae^{-\alpha t}) = A = 0{,}10050$ m

en $x = 0{,}1000$ m

dus: $A - x(t=0) = \underline{0{,}50 \text{ mm}}$.



c. $x = Ae^{-\alpha t}$ als $\cos(\omega_1 t+\beta) = 1$, dus als $\omega_1 t + \beta = n \cdot 2\pi$

met $n = 0, 1, 2, 3,$

voor $n=0$ is $\omega_1 t_0 = -\beta \Rightarrow t_0 = \frac{0{,}1002}{9{,}950} = 0{,}0101$.

#

Formulelijst bij tn 412 (Mechanica II voor TA²).

Deze lijst wordt m.i.v. 1/1-'99 bij elk tentamen uitgereikt. De gebruiker dient op de hoogte te zijn van de gebruikte symbolen, alsook van de voorwaarden waaronder de verschillende formules geldig zijn. Formules waarvan wordt aangenomen dat iedereen ze kent (zoals de tweede wet van Newton: $\mathbf{F} = m\vec{a}$) zijn niet in deze lijst opgenomen. *N.B. Vetgedrukt symbool = vector.*

Eén deeltje:

$\vec{a}_{tan} = \dot{v}\,\vec{e}_{tan}$; $a_n = v^2/R$

$\vec{v}_{rad} = \dot{r}\,\vec{e}_r$; $\vec{v}_{tr} = r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

Ongedempte harm. trilling: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{b}}$

$P = \mathbf{F} \cdot \vec{v}$

$dE_k = \mathbf{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$

$\mathbf{F} = -\nabla E_p \rightarrow F_x = -\partial E_p/\partial x$ enz.!

Impuls- en krachtmoment:

$\mathbf{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$; $\mathbf{M} = \vec{r} \times \mathbf{F}$; $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$

N deeltjes:

$\vec{L}_O = \vec{L}_C + \vec{r}_C \times m\vec{v}_C$

Lichamen:

$L_z = I\omega_z$

$I = \int (r')^2\, dm$

$P = M_z\omega_z$ (star lichaam)

$d(\frac{1}{2}I\omega^2) = M_z d\varphi$ (id.)

$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$ (plat lichaam)

$I = I_C + ms^2$ (Steiner)

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{b'}}$; $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{smg}}$

Vlakke beweging:

$\sum \mathbf{F} = m\vec{a}_C$ en $\mathbf{M}_C = \dot{\mathbf{L}}_C$

$E_k = \frac{1}{2}I_A\omega^2$

$E_k = \frac{1}{2}I_C\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C^2$

Lineair gedempte en gedwongen trillingen:

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{b}{m}}$ en $\alpha = \dfrac{r}{2m}$

Zwak: $x = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_1 t + \beta)$

waarin $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

Kritiek: $x = (At + B)\,e^{-\alpha t}$

Sterk: $x = \left(A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{-\omega_1 t}\right) e^{-\alpha t}$

waarin $\omega_1 = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

$\tau = \dfrac{1}{2\alpha}$; $Q = \omega_1\tau$

$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$ bij $Q > \frac{1}{2}$