Tentamen
Datum: 24-03-2003

# TN4110TU: Mechanica voor Technische Aardwetenschappen en Geodesie - Uitwerkingen

L.R. van den Doel

L.R.vandenDoel@tnw.tudelft.nl

TU Delft
Delft University of Technology

Pattern Recognition Group
Department Imaging Science & Technology
Faculty of Applied Sciences
Delft University of Technology
Lorentzweg 1, 2628 CJ Delft, The Netherlands

## Opgave 1

a) De massa van de raket als functie van de tijd wordt gegeven door:

$$m(t) = m_i - kt. \tag{1}$$

Als alle brandstof verbruikt is, dan is de massa van de raket gelijk aan $m_f$. Dit invullen in de uitdrukking voor $m(t)$ geeft de tijdsduur aan waarin alle brandstof is verbruikt:

$$t = \frac{m_i - m_f}{k} = \frac{60000 - 30000}{150} = 200s. \tag{2}$$

b) Dit tijdstip invullen in de uitdrukking voor de snelheid geeft:

$$\begin{aligned} v(200) &= -v_0 \ln\left(\frac{m_f}{m_i}\right) - g(200) \\ &= -(6000)\ln\left(\frac{30000}{60000}\right) - (9.8)(200) = 2.2km/s. \end{aligned}$$

c) De kracht $F$ die op de raket werkt, wordt gegeven door

$$\begin{aligned} F &= \frac{dp}{dt} = \frac{dmv}{dt} = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} \\ &= m(t)\left(\frac{kv_0}{m(t)} - g\right) - k\left(-v_0 \ln\left(\frac{m(t)}{m_i}\right) - gt\right) \\ &= kv_0 - gm(t) + kv_0 \ln\left(\frac{m(t)}{m_i}\right) + kgt. \end{aligned}$$

Op $t = 0$ is de kracht gelijk aan $F = kv_0 - gm_i = (150)(6000) - (9.8)(60000) = 312kN$. Op $t = t_f$ is $m(t) = m_f$. De kracht is dan gelijk aan $F = kv_0 - gm_f + kv_0 \ln\left(\frac{m_f}{m_i}\right) + kgt_f$. Invullen geeft $F = (150)(6000) - (9.8)(30000) + (150)(6000)\ln(\frac{1}{2}) + (150)(9.8)(200) = 276kN$. Aan het begin is de kracht groter.

d) De versnelling van de raket volgt door de uitdrukking van $v(t)$ te differentiëren naar $t$:

$$\begin{aligned} a(t) = \frac{dv(t)}{dt} &= -v_0\left(\frac{m_i}{m(t)}\right)\left(\frac{1}{m_i}\right)\left(\frac{dm(t)}{dt}\right) - g \\ &= \frac{kv_0}{m_i - kt} - g. \end{aligned}$$

Op $t = 0$ is $a = \frac{kv_0}{m_i} - g = \frac{(150)(6000)}{60000} - 9.8 = 5.2m/s^2$. Op $t = t_f$ is $m(t) = m_f$, en $a = \frac{kv_0}{m_f} - g = \frac{(150)(6000)}{30000} - 9.8 = 20.2m/s^2$. Op het eind is de versnelling dus het grootst.

e) De maximale kracht volgt door de uitdrukking voor $F(t)$ naar $t$ de differentiëren en gelijk aan nul te stellen:

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{dt} &= -g\frac{dm(t)}{dt} + kv_0\left(\frac{m_i}{m(t)}\right)\left(\frac{1}{m_i}\right)\left(\frac{dm(t)}{dt}\right) + kg \\ &= kg + kv_0\frac{-k}{m(t)} + kg \\ &= 2kg - \frac{k^2 v_0}{m(t)} = 0 \end{aligned}$$

Deze uitdrukking is gelijk aan 0 als

$$m(t) = m_i - kt = \frac{kv_0}{2g} \to t = \frac{m_i}{k} - \frac{v_0}{2g} = \frac{60000}{150} - \frac{6000}{2(9.8)} = 93.9s \tag{3}$$

Dit invullen in de uitdrukking voor de kracht $F(t)$ geeft:

$$\begin{aligned} F &= kv_0 - g\left(\frac{kv_0}{2g}\right) + kv_0 \ln\left(\frac{kv_0}{2m_i g}\right) + kg\left(\frac{m_i}{k} - \frac{v_0}{2g}\right) \\ &= m_i g + kv_0 \ln\left(\frac{kv_0}{2m_i g}\right) \\ &= (60000)(9.8) + (150)(6000)\ln\left(\frac{(150)(6000)}{2(60000)(9.8)}\right) = 347kN. \end{aligned}$$

## Opgave 2

a) Onderaan de helling bestaat de mechanische energie uit kinetische energie: $E = K = \frac{1}{2}mv_0^2$. De mechanische energie wordt omgezet in potentiële energie $U = mgd\sin\alpha$ en wrijvingsenergie (=warmte!). Als de doos met een lage beginsnelheid de helling op wordt geduwd, dan is de mechanische energie relatief laag en zal de doos niet hoog op de helling komen. Niet hoog op de helling komen betekent dat de wrijvingskracht daar nog niet zo groot is, en de doos zal dan weer naar beneden glijden.

b) Als de beginsnelheid van de doos groot is, dan heeft de doos relatief veel mechanische energie en zal de doos hoog op de helling komen. Hoog op de helling betekent een grote wrijvingskracht, zodat de doos hoog op de helling tot stilstand komt.

c) De doos kan op de helling blijven staan, nadat hij naar boven is geschoven als de wrijvingskracht groter is dan de component van de zwaartekracht, die de doos naar beneden probeert te trekken. De minimale afstand $d$ volgt dan uit:

$$F_r = \mu_k(d)N = Ad \cdot mg\cos\alpha = mg\sin\alpha = F_{z\parallel} \to Ad = \tan\alpha. \tag{4}$$

d) De door de wrijvingskracht verrichte arbeid bij het naar boven schuiven van de doos over een afstand $d$ wordt gegeven door:

$$W_r = -mg\cos\alpha \int_0^d Ax\,dx = -\frac{1}{2}mg \cdot Ad^2\cos\alpha. \tag{5}$$

e) De mechanische-energiebalans luidt nu:

$$K + W_r = U \to \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mg \cdot Ad^2\cos\alpha = mgd\sin\alpha. \tag{6}$$

De krachtenbalans (Vergelijking 4) invullen in de energie balans geeft:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mg \cdot Ad^2 \cos\alpha = mgd\sin\alpha \qquad (7)\\
\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mg \cdot Ad^2 \cos\alpha + Ad^2 \cdot mg\cos\alpha \qquad (8)\\
\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}mg \cdot Ad^2 \cos\alpha \qquad (9)\\
v_0^2 = 3g\frac{A^2d^2}{A}\cos\alpha = 3\frac{g}{A}\tan^2\alpha\cos\alpha \qquad (10)\\
v_0 = \sqrt{\frac{3g}{A}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} \qquad (11)
\end{aligned}
$$

## Opgave 3

a) De mechanische energie $E$ is constant, omdat de enige kracht, die op de satelliet werkt, de gravitatiekracht is. De gravitatiekracht is een omgekeerd kwadratische kracht, *i.e.* een centrale kracht, en is per definitie conserverend. Dus $E$ is behouden.

$$
\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\mathbf{e}_r = -\nabla V \rightarrow -\frac{dV}{dr} = -G\frac{mM}{r^2} \rightarrow V = -G\frac{mM}{r}. \qquad (12)
$$

De mechanische energie $E$ wordt gegeven door:

$$
E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = constant. \qquad (13)
$$

b) Het impulsmoment $\mathbf{L}_A$ is behouden, als er geen uitwendig krachtmoment $\mathbf{M}_A$ op de satelliet werkt. De gravitatiekracht is een centrale kracht en kan daarom geen krachtmoment uitoefenen. Daarom is $\mathbf{L}_A$ behouden:

$$
\mathbf{L}_A = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \rightarrow L_A = mrv\sin\phi = constant, \qquad (14)
$$

met $\phi$ de hoek tussen $\mathbf{r}$ en $\mathbf{v}$.

c) In punt $P_1$ is de afstand tussen de aarde en de satelliet gelijk aan $c$ en in punt $P_2$ is de afstand tussen de aarde en de satelliet gelijk aan $a + b$. In deze twee punten staat de snelheidsvector loodrecht op de positievector, dus $\phi = \frac{\pi}{2}$. Behoud van impulsmoment geeft dan de volgende uitdrukking:

$$
mr_1v_1 = mr_2v_2 \leftrightarrow v_2 = \frac{r_1}{r_2}v_1 = \frac{c}{a+b}v_1 = \frac{\alpha}{1+\epsilon}\frac{1-\epsilon^2}{(1+\epsilon)\alpha}v_1 = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}v_1 \qquad (15)
$$

d) Gebruik makend van behoud van energie geeft:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mM}{c} = \frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM}{a+b} \tag{16}$$

$$v_1^2 - v_2^2 = 2GM\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a+b}\right) \tag{17}$$

$$v_1^2 - v_2^2 = 2GM\left(\frac{1+\epsilon}{\alpha} - \frac{1-\epsilon}{\alpha}\right) \tag{18}$$

$$v_1^2 - v_2^2 = \frac{4GM\epsilon}{\alpha} \tag{19}$$

$$v_1^2 = v_2^2 + \frac{4GM\epsilon}{\alpha} \tag{20}$$

$$v_1 = \sqrt{v_2 + \frac{4GM\epsilon}{\alpha}} \tag{21}$$

e) Gebruik makend van de resultaten van onderdeel c) en onderdeel d) geeft:

$$v_1^2 - v_2^2 = \frac{4GM\epsilon}{\alpha} \tag{22}$$

$$v_1^2\left(1 - \left(\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right)^2\right) = \frac{4GM\epsilon}{\alpha} \tag{23}$$

$$v_1^2\left(\frac{(1+\epsilon)^2}{(1+\epsilon)^2} - \frac{(1-\epsilon)^2}{(1+\epsilon)^2}\right) = \frac{4GM\epsilon}{\alpha} \tag{24}$$

$$v_1^2\frac{4\epsilon}{(1+\epsilon)^2} = \frac{4GM\epsilon}{\alpha} \tag{25}$$

$$v_1 = (1+\epsilon)\sqrt{\frac{GM}{\alpha}} \tag{26}$$

Met het resultaat uit onderdeel c) volgt dan

$$v_2 = (1-\epsilon)\sqrt{\frac{GM}{\alpha}} \tag{27}$$

## Opgave 4

a) Het langzame neutron heeft massa $m_1 = m$ en snelheid $u_1$. Het stilstaande deuteron heeft massa $m_2 = 2m$. De volgende vergelijkingen kunnen worden opgesteld:

$$x - impuls: \; mu_1 = 2mv_{2x} \tag{28}$$

$$y - impuls: \; 0 = mv_{1y} - 2mv_{2y} \tag{29}$$

$$kinetische\ energie\ \tfrac{1}{2}mu_1^2 = \frac{1}{2}mv_{1y}^2 + \frac{1}{2}2mv_{2x}^2 + \frac{1}{2}2mv_{2y}^2 \tag{30}$$

Herschrijven geeft:

$$v_{2x} = \frac{u_1}{2} \tag{31}$$

$$v_{2y} = \frac{v_{1y}}{2} \tag{32}$$

$$u_1^2 = v_{1y}^2 + 2v_{2x}^2 + 2v_{2y}^2 \tag{33}$$

De bovenste twee vergelijkingen invullen in de onderste vergelijking geeft:

$$u_1^2 = v_{1y}^2 + 2\frac{u_1^2}{4} + 2\frac{v_{1y}^2}{4} \tag{34}$$
$$u_1^2 = 3v_{1y}^2 \tag{35}$$
$$v_{1y} = \frac{u_1}{3}\sqrt{3}. \tag{36}$$

b) De andere snelheidscomponenten zijn:

$$v_{2x} = \frac{u_1}{2} \tag{37}$$
$$v_{2y} = \frac{u_1}{6}\sqrt{3} \tag{38}$$

c) De hoek $\theta_2$ volgt uit:

$$\tan\theta_2 = \frac{v_{2y}}{v_{2x}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \rightarrow \theta_2 = \arctan(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 30^\circ. \tag{39}$$

d) De kinetische energie van het deuteron na de botsing wordt nu gegeven door:

$$K_{deuteron} = \frac{1}{2}2mv_{2x}^2 + \frac{1}{2}2mv_{2y}^2 \tag{40}$$
$$K_{deuteron} = \frac{1}{2}2m\frac{u_1^2}{4} + \frac{1}{2}2m\frac{3}{36}u_1^2 \tag{41}$$
$$K_{deuteron} = \left(\frac{1}{2}mu_1^2\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) \tag{42}$$
$$K_{deuteron} = \frac{2}{3}K_0 \tag{43}$$

Tweederde van de kinetische energie $K_0$ van het langzame neutron wordt overgedragen aan het deuteron.