Tentamen
Datum: 26-06-2003

TN4110TU: Mechanica voor Technische Aardwetenschappen en Geodesie (extra herkansing)

L.R. van den Doel

L.R.vandenDoel@tnw.tudelft.nl

Delft University of Technology

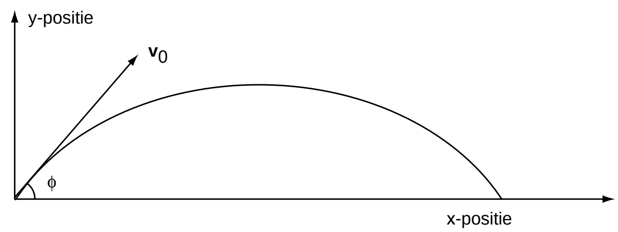
Pattern Recognition Group
Department Imaging Science & Technology
Faculty of Applied Sciences
Delft University of Technology
Lorentzweg 1, 2628 CJ Delft, The Netherlands

Opgave 1

De kinematische bewegingsvergelijkingen behorende bij projectielbeweging worden gegeven door de volgende vergelijkingen:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\phi)\, t, \\ y(t) = (v_0 \sin\phi)\, t - \frac{1}{2} g t^2, \end{cases} \tag{1}$$

waarin g de versnelling ten gevolge van de zwaartekracht $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$ is. Het voorwerp dat deze beweging volgt heeft een beginsnelheid $\mathbf{v}_0$ onder een hoek ϕ ten opzichte van de horizontale x-as. Zie de onderstaande figuur. Zoals uit deze bewegingsvergelijkingen al blijkt beschrijft het voorwerp een parabool. Maar er zijn nog meer interessante zaken te onderzoeken aan deze beweging.....



a **(2 punten)** Leid een uitdrukking af voor de tijdsduur ΔT waarin het voorwerp de paraboolvormige baan aflegt en weer op de grond terecht komt.

b) **(3 punten)** Leid een uitdrukking af voor het bereik Δx van deze beweging langs de x-as, *d.w.z.* het verschil in x-positie tussen het begin en het einde van de projectielbeweging.

c) **(4 punten)** Bereken onder welke hoek ϕ het bereik Δx van deze beweging *maximaal* is.

d) **(3 punten)** Leid een uitdrukking af voor de kromtestraal $R = \frac{v^2}{a_n}$ in het hoogste punt van de baan.

e) **(4 punten)** Er is een bepaalde hoek ϕ_R, waarbij de maximale hoogte H gelijk is aan de kromtestraal R berekende bij onderdeel (d): $H = R$. Voor deze waarde van phi kan Δx geschreven worden als $\Delta x = fR$, waarin f een constante is. Bereken f.

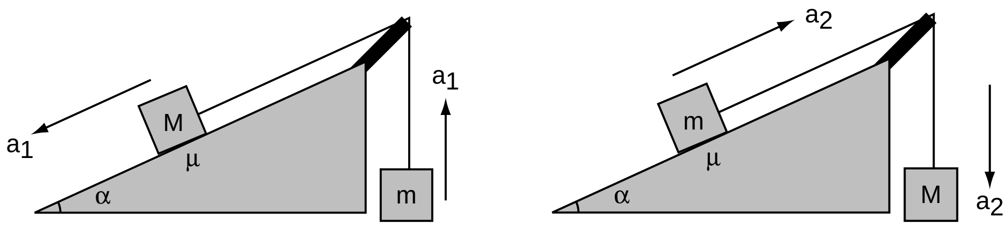
f) **(4 punten)** Als je een voorwerp recht omhoog gooit, $\phi = \frac{\pi}{2}$, dan beweegt het voorwerp eerst van je af, en daarna weer naar je toe. Als je een voorwerp onder een kleine hoek ϕ werpt, dan beweegt het voorwerp voortdurend van je af, *d.w.z.* de afstand $r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ wordt voortdurend groter als functie van de tijd t. Bewijs dat de afstand $r(t)$ altijd toeneemt voor hoeken ϕ waarvoor geldt dat:

$$\sin\phi < \sqrt{\frac{8}{9}}. \tag{2}$$

Opgave 2

Om op een ingewikkelde manier de verhouding van twee massa's m en M, waarbij $m < M$ te kunnen meten, wordt gebruikt gemaakt van een helling. De helling heeft een lengte l. Aan de bovenkant van de helling wordt een wrijvingsloze katrol geplaatst. De helling maakt een hoek α met de horizontaal. In het eerste experiment wordt de zware massa M op de top van de helling gelegd en met een massaloos koord, dat over de katrol heen wordt geslagen, verbonden wordt met de lichte massa m die naar beneden hangt. Als dit systeem van massa's wordt losgelaten, dan beweegt de zware massa versneld naar beneden en de lichte massa versneld omhoog. In het tweede experiment wordt de lichte massa m onderaan de helling gelegd en met hetzelfde massaloze koord over de katrol heen verbonden met de zware massa M, die nu naar beneden hangt. Als dit systeem van massa's wordt losgelaten, dan beweegt de zware massa M opnieuw naar beneden en de lichte massa m omhoog. Uit de verhouding van de gemeten versnellingen, a_1 in het eerste experiment en a_2 in het tweede experiment, kan je de verhouding van de massa's berekenen. Bedenk dat wrijving een rol speelt op de helling. Neem aan dat de statische (μ_s) en kinetische (μ_k) wrijvingscoëfficiënt gelijk zijn: $\mu_k = \mu_s = \mu$.

- N.B. Je kunt deze opgave, in eerste instantie, aanzienlijk vereenvoudigen door de wrijving buiten beschouwing te laten, *d.w.z.* neem $\mu = 0$ en door geen helling te beschouwen maar een horizontale ondergrond met lengte l, *d.w.z.* kies $\alpha = 0$.



a) **(6 punten)** Beschouw het eerste experiment. Stel krachtenbalansen op voor de beide massa's (in woorden: "*massa maal versnelling is de som van de krachten*") en bewijs de volgende uitdrukkingen voor de versnelling a_1 van de massa's en de spankracht T_1 in het koord:

$$\begin{cases} a_1 = \left[\frac{M(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m}{m+M}\right] g, \\ T_1 = \frac{mM}{m+M}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha + 1)g. \end{cases} \tag{3}$$

b) **(6 punten)** Beschouw nu het tweede experiment. Leidt uitdrukkingen af voor de versnelling a_2 en de spankracht T_2. De spankracht T_2 is *niet* gelijk aan de spankracht T_1!

c) **(4 punten)** Gegeven de uitdrukkingen voor de versnelling a_1 van onderdeel (a) en de versnelling a_2 gevonden in onderdeel (b), leid dan een uitdrukking af voor de massaverhouding $\frac{m}{M}$ uit in termen van deze versnellingen a_1 en a_2, de hoek α, en de wrijvingscoëfficiënt μ.

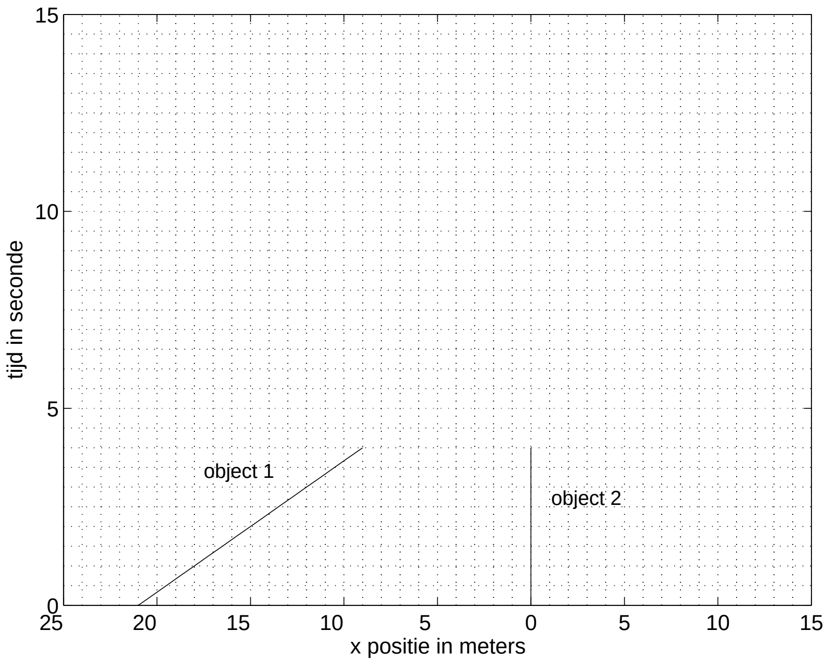
d) **(4 punten)** Beschouw nu weer het eerste experiment. Definieer ΔK_M en ΔK_m als de verandering van de kinetische energie K van massa M respectievelijk massa m tijdens het experiment, ΔU_M en ΔU_m als de verandering van potentiële energie van massa M respectievelijk massa m tijdens het experiment en W als de arbeid verricht door de wrijvingskracht tijdens het experiment. Het eerste experiment start met de zware massa M bovenaan de helling en eindigt als de zware massa onderaan de helling komt met snelheid v. De afgelegde weg is dan dus l meter. Neem de onderstaande tabel over en vul hem in. Leid met behulp van deze gegevens een uitdrukking af voor de eindsnelheid v van de massa's.

ΔK_M	$\ldots$
ΔK_m	$\ldots$
ΔU_M	$\ldots$
ΔU_m	$\ldots$
W	$\ldots$

Merk op dat er ook andere manieren mogelijk zijn om deze uitdrukking voor de snelheid v te vinden zonder gebruik te maken van de grootheden in de tabel. *Als je dat doet, moet je toch de tabel invullen!*

Opgave 3

Zie de onderstaande grafiek. Deze grafiek representeert een 1-dimensionale botsing tussen twee objecten. Langs de verticale as staat de tijd t in seconden en langs de horizontale as staat de positie x in meters. In deze grafiek kun je aflezen op welke positie een object zich bevindt als functie van de tijd.



a) **(2 punten)** Bepaal de snelheid u_1 van object 1 met massa $m_1 = 2kg$ in het interval tussen t_1 en t_2.

b) **(2 punten)** Bepaal de snelheid u_2 van object 2 met massa $m_2 = 4kg$ in het interval tussen t_1 en t_2.

c) **(2 punten)** Op welk tijdstip t_b botst object 1 tegen object 2?

d) **(3 punt)** Teken in deze grafiek een lijn die de beweging van het massamiddelpunt $X_C(t)$ voorstelt.

e) **(3 punten)** De botsing is volledig elastisch. Bereken de impuls van object 1 en van object 2 na de botsing.

f) **(4 punten)** Teken twee lijnen in de figuur, die de beweging van de objecten na de botsing voorstellen. Geef duidelijk aan welke lijn bij welk object hoort.

g) **(4 punten)** Stel dat de botsing volledig *inelastisch* zou zijn, teken dan in de figuur de beweging van de objecten na de botsing.

N.B.: Maak bij ieder onderdeel waar staat *"teken"* gebruik van berekeningen. A ls je onderdeel (a) en (b) niet kunt beantwoorden, gebruik dan $v_1 = 2m/s$ en $v_2 = -4m/s$, d.w.z. dat object 1 in de positieve x-richting beweegt en object 2 in de negatieve x-richting.

Formulelijst

Deze lijst wordt bij elk tentamen uitgereikt. U dient op de hoogte te zijn van de betekenis van de gebruikte symbolen, alsook van de voorwaarden waaronder de verschillende formules geldig zijn. Triviale formules, zoals de tweede wet van Newton, zijn niet in deze lijst opgenomen.

Poolcoördinaten: $d\mathbf{e}_r/dt = \dot{\varphi}\ \mathbf{e}_\varphi$ en $d\mathbf{e}_\varphi/dt = -\dot{\varphi}\ \mathbf{e}_r$
Eén deeltje: $\mathbf{a}_{\tan} = \dot{v}\ \mathbf{e}_{\tan}; \quad \mathbf{a}_{\mathsf{n}} = \frac{v^2}{R}\ \mathbf{e}_{\mathsf{n}}$ $\mathbf{v}_{\mathsf{rad}} = \dot{r}\ \mathbf{e}_r; \quad \mathbf{v}_{\mathsf{tr}} = r\dot{\varphi}\ \mathbf{e}_\varphi$
Ongedempte harm. trilling: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{b}}$ $x = A\cos(\omega t + \varphi)\,,\ \omega = \sqrt{b/m}$ $\mathbf{F}_{\mathsf{grav}} = f(r)\ \mathbf{e}_r, \quad f(r) = (-Gm_1m_2)/r^2$ $F_{\mathsf{w,st}} \leq \mu_{\mathsf{st}}F_{\mathsf{n}}; \quad F_{\mathsf{w,k}} = \mu_{\mathsf{k}}F_{\mathsf{n}}$ $P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$ $dE_{\mathsf{k}} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -dE_{\mathsf{p}}$ $\mathbf{F} = -\nabla E_{\mathsf{p}} \ \Rightarrow\ F_x = -\partial E_{\mathsf{p}}/\partial x$ enz. $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0 \ \Leftrightarrow\ \partial F_y/\partial x - \partial F_x/\partial y = 0$ enz. $\mathbf{F} = f(r)\ \mathbf{e}_r \ \Leftrightarrow\ f(r) = -dE_p/dr$
Impuls- en krachtmoment: $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times m\mathbf{v}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}; \quad \mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$
Twee deeltjes: $E_{\mathsf{k}} = E'_{\mathsf{k}} + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_{\mathsf{C}}^2$ $E_{\mathsf{k}} = \frac{1}{2}\mu v_{\mathsf{rel}}^2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)\,v_{\mathsf{C}}^2$ $\mathbf{L}_{\mathsf{C}} = \mathbf{r}_{12}\times\mu\mathbf{v}_{\mathsf{rel}}$
N deeltjes: $E_{\mathsf{k}} = E'_{\mathsf{k}} + \frac{1}{2}mv_{\mathsf{C}}^2$ $\mathbf{L}_{\mathsf{O}} = \mathbf{L}_{\mathsf{C}} + \mathbf{r}_{\mathsf{C}}\times m\mathbf{v}_{\mathsf{C}}$

Antwoordblad bij Opgave 3

Lever dit antwoord blad in bij je andere tentamen papieren. Schrijf duidelijk je **naam** en **studienummer** op deze bladzijde. Schrijf tevens duidelijk bij elke grafiek bij welk onderdeel van opgave 3 die grafiek hoort.