Mathematics 3 AESB1310, TA toets 1 07-03-2014.

1.a) $$f\left(x, \frac{x}{x-1}\right) = \frac{x \cdot \frac{x}{x-1}}{x + \frac{x}{x-1}} = \frac{x^2}{x(x-1)+x} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$y = \frac{x}{x-1}$ is dus een hoogtelijn van f (hoogte 1).

b) De lijn $y = \frac{x}{x-1}$ gaat door $(0,0)$. Langs de lijn $y = \frac{x}{x-1}$ kom je dus bij $(0,0)$ aan op hoogte 1.

Verder geld bijvoorbeeld $f(x,0) = \frac{0}{x} = 0$, langs de x-as kom je dus in $(0,0)$ aan op hoogte 0.

Conclusie: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ bestaat niet.

2 a) $f(x,y) = xy^2 - x$. $\quad f(1,2) = 3$.

$f_x(x,y) = y^2 - 1 \qquad f_x(1,2) = 3$

$f_y(x,y) = 2xy \qquad f_y(1,2) = 4$.

$L(x,y) = f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)$

Dus: $L(x,y) = 3 + 3(x-1) + 4(y-2)$.

b). $|\langle 3,-4\rangle| = \sqrt{9+16} = 5$

Neem $\underline{u} = \langle \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\rangle$ (lengte 1).

$$D_{\underline{u}} f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \underline{u} = \langle 3, 4\rangle \cdot \langle \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\rangle$$
$$= \frac{9}{5} - \frac{16}{5} = -\frac{7}{5}$$

3. a). $f(x,y) = xye^{-x}$.

$f_x(x,y) = ye^{-x} - xye^{-x}$.

$f_y(x,y) = xe^{-x}$.

$f_y(x,y) = 0 \to x = 0$, met $f_x(x,y) = 0$ volgt ook $y = 0$.

$(0,0)$ is het enige stationaire punt.

3 a) vervolg.

2^e afgeleide test: $f_{xx} = -ye^{-x} - ye^{-x} + xye^{-x}$

$f_{xy} = e^{-x} - xe^{-x}$

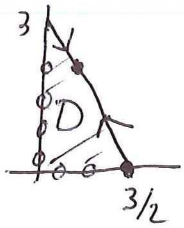
$f_{yy} = 0.$

$$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -(e^{-x} - xe^{-x})^2$$

in $(0,0)$: $D = -1 < 0$, dus een zadelpunt.

b). D is begrensd, gesloten en f is continu op D, f neemt dus op D een absoluut minimum en een absoluut maximum aan.

Er zijn geen stationaire punten in het inwendige van D, dus deze extremen liggen op de rand.



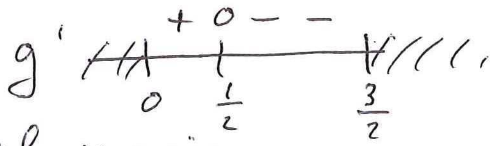
Op de lijnen $x=0$ en $y=0$ geldt $f(x,y)=0$.

Op de lijn $y = 3-2x$ geldt:

$f(x,y) = x(3-2x)e^{-x} = g(x)$.

$$g'(x) = (3-2x)e^{-x} - (3x-2x^2)e^{-x} = (2x^2-7x+3)e^{-x}$$

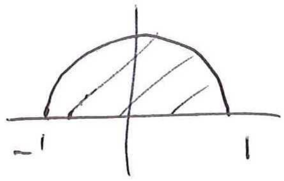
$2x^2 - 7x + 3 = 0 \quad x = \frac{1}{2}$ of $x = 3$.



Conclusie: f heeft een globaal maximum in $(\frac{1}{2}, 2)$: $f(\frac{1}{2}, 2) = \frac{2}{2}e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

globaal minimum, grootte 0 wordt aangenomen op de lijen $x=0$ en $y=0$.

4-



a) $$\iint_G 2x^2y\,dA = \int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 2x^2y\,dy\,dx.$$

b) $$\iint_G 2x^2y\,dA = \int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 2x^2y\,dx\,dy.$$

c) Gebruik (a) voor het berekenen van de integraal:

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 2x^2y\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\left[y^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$\int_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\,dx = \int_{-1}^{1}(x^2-x^4)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{4}{15}$$