Uitwerkingen tentamen Analyse deel 3 voor TA en GE op 14 april 2000:

1. $f'(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x} \;\; \frac{\partial f}{\partial y}) = (2x(y^2-1)+y \;\; 2x^2y + x)$, dus $f'(a) = (8 \;\; 5)$.
$l(\mathbf{x}) = f(a) + (\mathbf{x}-\mathbf{a})\nabla f(a) = 5 + 8(x-1) + 5(y-2)$.
De vergelijking van het raakvlak is $z = l(x,y)$ dus
$z = 5 + 8(x-1) + 5(y-2)$ ofwel $8x + 5y - z = 13$.

2. Met $\mathbf{v} = \mathbf{w}/|\mathbf{w}| = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ krijgen we $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = \mathbf{v}.\nabla f(a) = \frac{3}{5}\,8 + \frac{4}{5}\,5 = \frac{44}{5}$. De richting is $\nabla f(a) = (8,5)$. De grootte is $|\nabla f(a)| = \sqrt{89}$.

3. De formule is $t_2(\mathbf{x}) = f(a) + \{(\mathbf{x}-\mathbf{a})\nabla\}f(a) + \frac{1}{2}\{(\mathbf{x}-\mathbf{a})\nabla\}^2 f(a) =$

$= f(a) + (x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y-2)\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \frac{1}{2}(x-1)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) +$

$+ (x-1)(y-2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + \frac{1}{2}(y-1)^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$. We zagen al $f(a) = 5$,

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y^2-1)+y\big|_a = 8$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y + x\big|_a = 5$. Hieruit volgt

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = 2(y^2-1)\big|_a = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = 2x^2\big|_a = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = 4xy + 1\big|_a = 9$. Dus

$t_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} + 8(x-1) + 5(y-2) + 3(x-1)^2 + 9(x-1)(y-2) + (y-2)^2$.

4. Stationaire punten van f op D: $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow 2x(y^2-1)+y = 0$ en
$2x^2y + x = x(2xy + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ en $y = 0$ of $x \neq 0$ dus $2xy = -1$, wat tot een contradictie leidt. Dus f heeft geen stationaire punten.

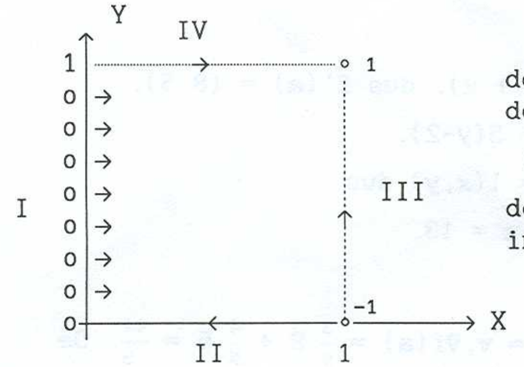
Randonderzoek:

I. $x = 0$ en $0 \le y \le 1 \Rightarrow f(0,y) = 0$,
II. $y = 0$ en $0 \le x \le 1 \Rightarrow f(x,0) = -x^2$ (dalend bij stijgende x),
III. $x = 1$ en $0 \le y \le 1 \Rightarrow f(1,y) = y^2 + y - 1$ (stijgend bij toenemende y),
IV. $y = 1$ en $0 \le x \le 1 \Rightarrow f(x,1) = x$ (stijgend bij toenemende x).

Verdachte punten: $(0,y)$ met $0 \le y \le 1$, $(1,1)$ en $(1,0)$.

Nu is $f(0,y) = 0$, $f(1,0) = -1$, $f(1,1) = 1$.
Dus f heeft een globaal maximum 1 in (1,1) en een globaal minimum -1 in (1,0). Locale extremen kunnen nu alleen nog op I liggen. Op I is de gradiënt van f: $\nabla f(0,y) = (y, 0)$, dus als $y > 0$ gericht volgens de

positieve X-as. Dus in bijv. (0,1) is een locaal minimum 0. [In feite in elk punt (0,y) met $1 \geq y > 0$ is een locaal minimum 0].



de pijlen binnen D geven de richting van ∇f aan,
(in (0,0) is $\nabla f = 0$)
de pijlen op de rand geven aan in welke richting de functie stijgt.

5. $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{3}\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en $\dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$

Dus $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial v}\left\{ \dfrac{\partial g}{\partial x} - \frac{1}{3}\dfrac{\partial g}{\partial y} \right\} = \frac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{1}{6}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{1}{3}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} =$

$= \frac{1}{2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{5}{6}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{1}{3}\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

6. i) Uit $y + z = 1$ volgt dat $y = 1 - z$ en uit $x + 2y + z^3 = 2$ volgt dan dat $x = 2 - z^3 - 2(1 - z) = 2z - z^3$. Dus de parametervoorstelling wordt: $\mathbf{x}(t) = (2t - t^3,\ 1 - t,\ t)$.
ii) Een raakvector aan k in $\mathbf{x}(t)$ is $\mathbf{x}'(t) = (2 - 3t^2, -1, 1)$. In het raakpunt (0,1,0) is $t = 0$, dus krijgen we: $\mathbf{x}(\lambda) = (0,1,0) + \lambda(2,-1,1)$.

7. We beschouwen $y = y(x)$ en $z = z(x)$. We differentiëren nu de vergelijkingen naar x:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} z\,y' + y\,z' = 0 & 6y^2 \\ 6y^2\,y' + 3z^2 z' = -3x^2 & z \end{array} \right.$$

$$\overline{(6y^3 - 3z^3)z' = 3x^2 z}$$

Dus in **b** geldt $3z' = 3$, dus $z' = 1$.

8. Er geldt $\mathbf{f}'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy^2 & 2yx^2 \end{pmatrix}$, dus voor de locale

inverse **g** geldt $\mathbf{g}'(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2xy^2 & 2yx^2 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 2x^2 y & -2y \\ -2xy^2 & 2x \end{pmatrix}$,

als de determinant $\Delta = 4x^3y - 4xy^3 \neq 0$. In (1,2) geldt $\Delta = 8 - 32 = -24$.
Uit $\mathbf{g}'(\mathbf{f}(1,2)) = \mathbf{f}'(1,2)^{-1}$ volgt nu dat in het punt
$(u,v) = \mathbf{f}(1,2) = (5,4)$ geldt:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{6},\ \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{6},\ \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{6},\ \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{12}.$$

9. We gaan eerst na of f stationaire punten heeft en bepalen dan de determinant van Hesse in deze punten.
Voor een stationair punt moet $f_x = 6x + 2y - 4 = 0$ en $f_y = 2x - 2y = 6 = 0$, dit levert $(x,y) = (-\frac{1}{4}, \frac{11}{4})$. Nu is $f_{xx} = 6$, $f_{xy} = f_{yx} = 2$ en $f_{yy} = -2$, dus de determinant van Hesse is:

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -16,\ H < 0,\ \text{dus f heeft geen extremen.}$$

****