1. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + 2y - z & = 2 \\ x + \alpha y & = 5 \\ 2x + 5y - z & = \beta \end{cases} \quad \text{waarbij } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   (a) Voor welke α en β is het gegeven stelsel strijdig?

   (b) Neem $\alpha = 3$ en $\beta = 7$ en bepaal de oplossingsverzameling van het gegeven stelsel.

2. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} x + 2y - 2\,z & = 4 \\ x + 4y + (p^2 - 13p + 24)\,z & = 2 \\ 3x + 7y + z & = p - 1 \end{cases} \quad \text{waarbij } p \in \mathbb{R}.$$

   (a) Voor welke waarde(n) van p is het gegeven stelsel strijdig?

   (b) Voor welke waarde(n) van p heeft het gegeven stelsel oneindig veel oplossingen?

3. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha\, x_3 + \alpha\, x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3\, x_4 & = 4 \\ 3\, x_1 + (\alpha + 2)\, x_4 & = 2 \\ x_1 - x_2 + (\alpha - 1)\, x_3 - x_4 & = -2 \end{cases} \quad \text{waarbij } \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Voor welke waarde(n) van α is het gegeven stelsel oplosbaar?

4. Het stelsel vectoren $\mathcal{A} = \{\underline{a}_1,\, \underline{a}_2,\, \underline{a}_3\}$ in $\mathbb{R}^4$ is gegeven door $\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$,

   $\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ en $\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Bewijs dat $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ een lineaire combinatie is van $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$ en $\underline{a}_3$.

   (b) Onderzoek of $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathit{Span}\,\{\underline{a}_1,\, \underline{a}_2,\, \underline{a}_3\}$.

5. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 & 0 \\ -16 & 11 & 2 & -3 \\ -7 & 5 & 1 & -1 \\ 14 & -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ en de vector $\underline{b} = \begin{bmatrix} 28 \\ -110 \\ -49 \\ \beta + 85 \end{bmatrix}$ waarbij $\beta \in \mathbb{R}$. De kolommen van A noemen we respectievelijk $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$ en $\underline{a}_4$.

   (a) Voor welke waarde(n) van β geldt $\underline{b} \in Span\,\{\underline{a}_1,\, \underline{a}_2,\, \underline{a}_3,\, \underline{a}_4\}$?

   (b) Is het lineaire stelsel $A\,\underline{x} = \underline{c}$ oplosbaar voor **elke** $\underline{c} \in \mathbb{R}^4$? Motiveer je antwoord.

6. Ga na voor welke waarde(n) van γ het stelsel vectoren $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2\gamma \\ -3\gamma \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\gamma \\ 32 \\ -12\gamma \end{bmatrix} \right\}$ lineair afhankelijk is.

7. **Bewijs of weerleg:** als $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ een onafhankelijk stelsel vectoren is in $\mathbb{R}^3$, dan is ook $\{\underline{a}_2 + \underline{a}_3,\, \underline{a}_1 + \underline{a}_3,\, \underline{a}_1 + \underline{a}_2\}$ een onafhankelijk stelsel vectoren.

8. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bepaal een basis in $NUL(A)$, waarbij elke basisvector gehele kentallen heeft.

9. In $\mathbb{R}^4$ is de verzameling $W = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_2 + 2\,x_3 - 2\,x_4 = 0 \right\}$ gegeven. Bewijs dat W een lineaire deelruimte is in $\mathbb{R}^4$.

10. Gegeven is de $3 \times 8-$ matrix F waarvoor geldt dat $\dim(NUL(F)) = p$. Bereken de kleinst mogelijke waarde en de grootst mogelijke waarde van p.

11. Beschouw het onafhankelijke stelsel vectoren $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ in $\mathbb{R}^4$ en de $4 \times 4-$ matrix B, waarvan de kolommen resp. $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ en $\underline{b}_1 - \underline{b}_2 + \underline{b}_3$ zijn.

    (a) Bepaal een basis in $NUL(B)$.

    (b) Bepaal de rang van B.

12. **Bewijs of weerleg:** Er bestaat geen $3 \times 3-$ matrix A waarvoor geldt $COL(A) = NUL(A)$.

13. In $\mathbb{R}^3$ zijn de bases $\mathcal{A} = \{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3\}$ en $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ gegeven, waarbij $\underline{a}_1 = 4\,\underline{b}_1 - \underline{b}_2$, $\underline{a}_2 = -\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3$ en $\underline{a}_3 = \underline{b}_2 - 2\,\underline{b}_3$. Bepaal $[\underline{x}]_{\mathcal{A}}$ als $\underline{x} = 3\,\underline{b}_1 + 4\,\underline{b}_2 + \underline{b}_3$.

14. De afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is de afbeelding die een vector uit $\mathbb{R}^2$ **eerst** roteert om [0,0] over π radialen en **vervolgens** loodrecht projecteert op de x_1- as. Geef een voorschrift voor afbeelding T en **toon** vervolgens **aan** dat afbeelding T lineair is.

15. Zij $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding die vectoren uit $\mathbb{R}^2$ projecteert op de deellijn $x_2 = x_1$ en $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de spiegeling in de deellijn $x_2 = -x_1$. Bepaal de beeldruimte van ST (de samenstelling van eerst T en vervolgens S).

16. Zij $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding waarvoor geldt $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$, $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bepaal de standaardmatrix van T.

17. Gegeven wordt de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ door voor te schrijven $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

    (a) Toon aan dat $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \in NUL(T)$.

    (b) Bepaal $R(T)$.

    (c) Bepaal de standaardmatrix (representatiematrix) van T.

18. Gegeven zijn de lineaire afbeeldingen $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ met voorschrift $T(\underline{x}) = A\,\underline{x}$ waarbij $A = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ en $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de rotatie om de x_2- as over π radialen.

    (a) Bepaal een basis in $NUL(T)$

    (b) Bovendien is de vector $\underline{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ p \end{bmatrix}$ met $p \in \mathbb{R}$ gegeven. Voor welke waarde(n) van p geldt $\underline{w} \in COL(T)$?

(c) Geef de standaardmatrix (representatiematrix) van R.

19. Beschouw de lineaire afbeelding $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die vectoren eerst orthogonaal projecteert op de lijn $x_2 = x_1$ en vervolgens roteert om $[0, 0]$ over $\frac{3}{4}\pi$ radialen tegen de wijzers van de klok in.

   (a) Bepaal een basis in de nulruimte (kern) van S.

   (b) Bepaal een basis in de beeldruimte (range) van S.

   (c) Bepaal de standaardmatrix van S.

20. **Bewijs of weerleg:** als F een $m \times n-$ matrix is en F een G een $n \times p-$ matrix is, waarbij $FG = O$ dan geldt $F = O$ of $G = O$.

21. Ga na voor welke waarde(n) van $\beta \in \mathbb{R}$ de matrix $\begin{bmatrix} 2 & -1 & \beta^2 + 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ inverteerbaar is.

22. Gegeven is matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & 1 \\ -2 & -2\alpha & -3 \\ 4 & 5\alpha & 9 + 5\alpha \end{bmatrix}$ met $\alpha \in \mathbb{R}$. Voor welke α is A inverteerbaar?

23. Gegeven zijn de inverteerbare $n \times n-$ matrices A en B. Geef een uitdrukking waarmee $(AB^T)^{-1}$ kan worden berekend als A^{-1} en B^{-1} bekend zijn en bewijs, m.b.v. de definitie van de inverse van een matrix, dat deze uitdrukking inderdaad gelijk is aan $(AB^T)^{-1}$.

24. Gegeven zijn de $n \times n-$ matrices A, B en C waarbij A en B inverteerbaar zijn. Bewijs of weerleg de volgende beweringen:

   (a) $A + B$ is een inverteerbare matrix.

   (b) De verzameling $H = \{\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, C\,\underline{x} = -2\,\underline{x} \}$ is een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$.

25. De vectoren $\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}$, $\underline{q} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{1}{10} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ en de lineaire deelruimte $V = Span\,\{\underline{v}_1,\, \underline{v}_2,\, \underline{v}_3\}$ zijn gegeven in $\mathbb{R}^4$. Bepaal de orthogonale projectie van $\underline{q}$ op V.

26. Gegeven zijn de vectoren $\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ en

$\underline{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$. Schrijf $\underline{y}$ als som van een vector $\underline{v}$ in $Span\,\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ en een vector $\underline{w}$ die loodrecht op $Span\,\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ staat.

(Hint: $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3\}$ is een orthogonaal stelsel vectoren)

27. Gegeven zijn de matrix $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ en de vector $\underline{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$.

    (a) Construeer een orthonormale basis in $COL(C)$.

    (b) Bepaal de orthogonale projectie van $\underline{d}$ op $COL(C)$ en bereken de kleinste-kwadraten-oplossing(en) van het lineaire stelsel vergelijkingen $C\,\underline{x} = \underline{d}$

28. Beschouw de puntenwolk : [0,2], [3,5], [8,7] en [15,8]. Bepaal de kromme van de vorm $y = \beta_0 + \beta_1\sqrt{1+x}$ die, in de zin van de kleinste-kwadratenmethode, het best aansluit bij de gegeven puntenwolk.

29. Gegeven zijn de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ -3 & -5 & -4 & 10 \\ 1 & -1 & 5 & -6 \\ -2 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ en de $4 \times 4-$ matrix B met $\det(B) = -4$.

    (a) Bereken $\det(A)$.

    (b) Bereken:

        i. $\det(AB)$.

        ii. $\det(3B)$.

        iii. $\det(B^T B)$.

        iv. $\det(B^{-1}AB)$.

30. Gegeven zijn de $4 \times 4-$ matrices A, B en C waarbij $|A| = 2$, $|B| = -4$ en $C = 2A^T B^{-1} A^2$. Bereken $|C|$.

31. Gegeven zijn de matrices $A = \begin{bmatrix} 5-\alpha & -2 & 3 \\ 8-2\alpha & 1-\alpha & 3 \\ 6 & 6 & -2-\alpha \end{bmatrix}$ en de $4 \times 4-$ matrices B en C met de eigenschap dat $|B| = -2$ en $|C| = -3$.

    (a) Bepaal de waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$ waarvoor $|A| = 0$.

    (b) Bepaal $\left|2B^{-2}C^3\right|$.

32. Bereken de oppervlakte van driehoek ABC met hoekpunten A=[3,1], B=[4,6] en C=[6,4].

33. Bereken van matrix $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ de eigenwaarden en geef bij elke eigenwaarde de algebraïsche multipliciteit.

34. Voor welke waarden van x zijn alle eigenwaarden van de matrix $\begin{bmatrix} x & 3 & 23 \\ 3 & x & 8 \\ 0 & 0 & 9-x \end{bmatrix}$ positief?

35. Bepaal γ zodat matrix $C = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ diagonaliseerbaar is.

36. Gegeven is matrix $B = \begin{bmatrix} -4 & \beta^2 - 4 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ met $\beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Bepaal de eigenwaarden van B.

   (b) Bepaal de eigenruimten van B.

   (c) Voor welke waarde(n) van β is B diagonaliseerbaar?

37. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha+4 & -\alpha-4 & -\alpha-1 \end{bmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Bepaal voor welke waarde(n) van α matrix A eigenwaarde 0 heeft.

   (b) Neem $\alpha = 0$ en ga na of A diagonaliseerbaar is.

38. Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $PDP^{-1} = A$ waarbij $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

39. Gegeven is de matrix $F_a = \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ -2 & -a & -1 \\ 4 & 2a & 2 \end{bmatrix}$ waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Bepaal de eigenwaarden van F_a.

   (b) Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $F_2 = PDP^{-1}$ (voor dit onderdeel mag je dus $\alpha = 2$ nemen).

40. Gegeven is de matrix $B = \begin{bmatrix} \beta+3 & 2 & 1 \\ 2 & \beta+3 & 1 \\ \beta & -\beta & \beta+1 \end{bmatrix}$ waarbij $\beta \in \mathbb{R}$.

(a) Bereken de eigenwaarden van B.

(b) Neem $\beta = 0$ en bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodat $PDP^{-1} = B$.

41. Beschouw het discrete dynamische systeem: $\begin{cases} \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \\ \underline{x}_{k+1} = A\,\underline{x}_k \quad \text{voor} \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$
waarbij $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$. Bepaal $\lim_{k\to\infty} \underline{x}_k$.

42. Gegeven is de $3 \times 3-$ matrix A met de eigenwaarden -3, $-\frac{5}{8}$ en 1.

(a) Is A diagonaliseerbaar?

(b) Is A inverteerbaar?

(c) Bereken $|A|$.

(d) We beschouwen het discrete dynamische systeem: $\begin{cases} \underline{x}_0 \text{ (een startvector uit } \mathbb{R}^3) \\ \underline{x}_{k+1} = A\,\underline{x}_k \quad \text{voor} \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$.
Convergeert dit dynamische systeem voor elke startvector $\underline{x}_0$ uit $\mathbb{R}^3$?

43. Voor welke waarde(n) van $\alpha \in \mathbb{R}$ is het stelsel polynomen $\{1 + 2t - t^2,\ 1 + \alpha t,\ 2 + 5t - t^2\}$ lineair afhankelijk?

44. Ga na voor welke waarde(n) van γ het stelsel polynomen $\{1 + 2t - 3t^2,\ 3 + 2\gamma t - 3\gamma t^2,\ 2\gamma + 32t - 12\gamma$ lineair afhankelijk is.

45. Geef een basis in *Span* $\{1 + 2t - t^2,\ 1 + 3t,\ -1 - 5t - 2t^2,\ t^2\}$.

46. Gegeven is basis $\mathcal{B} = \{1,\ 2t,\ -2 + 4t^2,\ -12t + 8t^3\}$ in $\mathbb{P}_3$. Bepaal $[p(t)]_{\mathcal{B}}$ als $p(t) = 7 - 12t - 8t^2 + 12t^3$.

47. In $\mathbb{P}_3$ (de vectorruimte van alle polynomen van ten hoogste graad 3) is de verzameling $U = \{p \in \mathbb{P}_3 \,|\, p(x) = \alpha + \beta x + \beta x^2 + \alpha x^3 \text{ met } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ gegeven.

(a) Bewijs dat U een lineaire deelruimte van $\mathbb{P}_3$ is.

(b) Bepaal een basis in U.

(c) Bepaal de coördinaten van $q(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$ t.o.v. de basis $\{1, 1 - x, x + x^2, x^2 - x^3\}$ in $\mathbb{P}_3$.

48. Gegeven zijn de bases $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1,\ \underline{b}_2\}$ en $\mathcal{C} = \{\underline{c}_1,\ \underline{c}_2\}$ in $\mathbb{R}^2$, waarbij $\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ en $\underline{c}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$.
Bepaal $P_{\mathcal{B} \longleftarrow \mathcal{C}}$.

49. In $\mathbb{P}_1$ zijn gegeven de bases $\mathcal{A} = \{-1 + 2x,\ 2 - 3x\}$ en $\mathcal{B} = \{1 + x,\ -1 + x\}$.
Bereken $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$.

50. Zij $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de rotatie om $Span\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$ over π radialen en $\mathcal{B}$ $= \left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$. Bepaal $[T]_{\mathcal{B}}$.

51. Zij $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de spiegeling in $Span\left\{\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}\right\}$ en $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right\}$. Bepaal $[T]_{\mathcal{B}}$.

52. Zij $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding met voorschrift $T(p(t)) = \begin{bmatrix}p(-1)\\p(1)\end{bmatrix}$. Bepaal de nulruimte en de beeldruimte van T.

53. Zij $W = Span\left\{\sin(t), \sin(t)+\cos(t), e^{3t}\right\}$, $T : W \to W$ de differentiaaloperator en $\mathcal{B} = \left\{\sin(t), \sin(t)+\cos(t), e^{3t}\right\}$. Bepaal $[T]_{\mathcal{B}}$.

54. Gegeven is de afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ met voorschrift $T(p(t)) = t\,p'(t)$.
    (**N.B.** $p'(t)$ staat voor de afgeleide van $p(t)$ naar t)
    (a) Bewijs dat T een lineaire afbeelding is.
    (b) Bepaal de nulruimte (kern) en de beeldruimte (range) van T. (Hint: polynomen uit $\mathbb{P}_2$ kunnen geschreven worden in de vorm $p(t) = a + bt + ct^2$ waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$)
    (c) We definiëren bovendien basis $\mathcal{B} = \left\{1,\ 1+t,\ 1+t+t^2\right\}$ in $\mathbb{P}_2$. Bepaal matrix $[T]_{\mathcal{B}}$.
    (d) Op de vectorruimte $\mathbb{P}_2$ wordt het inprodukt met voorschrift $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$ gegeven. Construeer m.b.v. het Gram-Schmidt-proces uitgaande van $\left\{1, t, t^2\right\}$ een orthogonale basis in $\mathbb{P}_2$.

55. Gegeven is de afbeelding $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ met voorschrift $T(p(t)) = t\,p'(t) - p(t)$.
    (**N.B.** $p'(t)$ staat voor de afgeleide van $p(t)$ naar t)
    (a) Bewijs dat T een lineaire afbeelding is.
    (b) Bepaal een basis in de nulruimte (kern) en de beeldruimte (range) van T. (Hint: polynomen uit $\mathbb{P}_2$ kunnen geschreven worden in de vorm $p(t) = a + bt + ct^2$ waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}$)
    (c) We definiëren bovendien basis $\mathcal{B} = \left\{1,\ 1+t,\ t+t^2\right\}$ in $\mathbb{P}_2$. Bepaal matrix $[T]_{\mathcal{B}}$.
    (d) We beschouwen vervolgens de vectorruimte $V = Span\{1, \sqrt{t}, t\}$ waarop het inprodukt met voorschrift $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$ is gedefinieerd. Construeer m.b.v. het Gram-Schmidt-proces uitgaande van $\left\{1, \sqrt{t}, t\right\}$ een orthogonale basis in V.

56. Gegeven is de vectorruimte $V = \left\{ f : \left[-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi\right] \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continu} \right\}$ met daarin de lineaire deelruimte $W = Span\,\{1,\ \sin(t),\ \cos(t)\}$. In W wordt de basis $\mathcal{B} = \{1,\ 1 + \sin(t),\ \sin(t) + \cos(t)\}$ gegeven en bovendien wordt de lineaire afbeelding $T : W \to W$ met voorschrift $T(f(t)) = 3f''(t) + 3f(t)$ gedefinieerd. (uiteraard staat $f''(t)$ voor de tweede afgeleide van $f(t)$ naar t).

    (a) Bepaal de beeldruimte (range) van T.

    (b) Bepaal matrix $[T]_{\mathcal{B}}$.

    (c) Op V wordt het inprodukt met voorschrift $\langle h,\, g\rangle =_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} h(t)g(t)dt$ gedefinieerd. Construeer in W, uitgaande van basis $\mathcal{B}$, m.b.v. het Gram-Schmidt-proces een orthogonale basis.

57. Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{P}_2$ (alle polynomen van ten hoogste graad 2) waarop het inprodukt met voorschrift $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$ gedefinieerd is. Bereken $\left\| x^2 - x \right\|$.

58. Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{P}_2$ met daarop gedefinieerd het inprodukt met voorschrift $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(x)\,g(x)\,dx$. Bepaal een polynoom $p \in \mathbb{P}_2$ met de eigenschap dat p ongelijk aan het nulpolynoom is en $p \perp q$ voor elke $q \in Span\left\{x,\ 1 - x^2\right\}$.