Samenvatting Mathematics II (voorheen Lineaire Algebra)
Geïnspireerd door een samenvatting van Francien Troost, vernieuwde versie door Adriaan van Natijne.

Het vak is verdeeld in drie onderdelen:
1. Differentiaalvergelijkingen
2. Basale lineaire algebra (hoofdstuk 1 en 2 van Lay)
3. Uitbreiding lineaire algebra (hoofdstuk 2 en 6 van Lay)

Samenvatting:
- Differentiaalvergelijkingen (Stewart: §9.1 – §9.5, §17.1 – §17.3)
- Complexe getallen (Stewart: Appendix H)
- Lineaire Algebra (Lay)
  Deeltentamen II
  - Stelsels lineaire vergelijkingen (Lay: §1.1 – §1.2)
    - Omzetten lineair systeem in een (aangevulde) matrix):
      $$\begin{array}{rrr} x_1 & -2x_2 & +x_3=0 \\ & 2x_2 & -8x_3=-8 \\ -4x_1 & +5x_2 & +9x_3=9 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$
      (Vergelijking 3 & 4, pagina 4.)
    - Oplossen lineaire vergelijking
      - Toegestane bewerkingen:
        - Replacement
        - Interchange
        - Scaling

        Uitgewerkt op pagina 6.
      - 'Fundamental questions' (pagina 7)
        - Is the system consistent: does at least one solution *exist*.
          $\left[\begin{array}{rr|r} 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} 5x_1 & +6x_2=9 \\ 0x_1 & +0x_2=3 \end{cases}$ Dit stelsel *strijdig* en heeft geen oplossingen.
        - If a solution exists, is it the *only* one: is the solution *unique*.
          $\left[\begin{array}{rr|r} 5 & 6 & 9 \\ 10 & 12 & 18 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rr|r} 5 & 6 & 9 \\ 5 & 6 & 9 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} 5x_1 & +6x_2=9 \\ 5x_1 & +6x_2=9 \end{cases}$ Zijn twee parallelle lijnen: oneindig veel oplossingen. (Zie ook figuur 2, pagina 3.)
      - Rij-echelon
        - Definitie (pagina 13):
          - All nonzero rows are above any rows of all zeros.
          - Each leading entry of a row is in a column to the right of the leading entry of the row above it.
          - All entries in a column below a leading entry are zeros.
        - Definitie rij-gereduceerde echelon vorm (pagina 13):
          - Definitie echelon-vorm.
          - The leading entry in each nonzero row is 1.
          - Each leading 1 is the only nonzero entry in the column.
        - Voorbeelden (pivot positie: ■, willekeurige waarde: ◊)
          - Echelon vorm: $\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & \lozenge & \lozenge & a \\ 0 & \blacksquare & \lozenge & b \\ 0 & 0 & \blacksquare & c \end{array}\right]$.

- Gereduceerde echelon vorm: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \end{array}\right]$.

   - Pivot position: a location in *A* that corresponds to a leading 1 position. Pivor column: a column of *A* that contains a pivot position.
- The row reduction alogrithm (pagina 15)
   - Begin with the leftmost nonzero column. This is a pivot column. Select a nonzero entry in the pivot column as a pivot. If necessary, interchange rows to move this entry into the pivot position.
   - Use row replacement operations to create zeros in all positions below the pivot.
   - Repeat the process until there are no more nonzero rows to modify.
- Oplossingen van lineaire systemen (pagina 18)
   - $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x_1 \quad -5x_3 = 1 \\ x_2 \quad +x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \\ x_3 \text{ is vrij} \end{cases}$

     $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} 1x_1 \quad +6x_2 \quad +2x_3 \quad -5x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_3 \quad -8x_4 \quad -x_5 = 5 \\ x_5 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \text{ is free} \\ x_3 = 5 + 4x_4 \\ x_4 \text{ is free} \\ x_5 = 7 \end{cases}$

     (Pagina 19)
- Aangepaste herhaling 'fundamental questions' pagina 7:
  If a lineair system is consistent, then the solution set contains either
  (i) a unique solution, when there are no free variables, or (ii) infinitely many solutions, when there is at least one free variable. (Pagina 21)

- Lineaire combinaties/vergelijkingen (Lay: §1.3)
   - Vectoren: $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ of $\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ op voorwaarde dat w_1 en w_2 reële getallen zijn (pagina 24). Geometrische weergave van een vector: zie figuur 1 en 2, pagina 25.
   - $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ is een vector in $\mathbb{R}^2$; $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ een vector in $\mathbb{R}^3$. (Pagina 25 en 26)
   - Rekenregels met vectoren (pagina 24):
     - Optellen: $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4 \\ -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$. Zie ook figuur 3, pagina 26.
     - Vermenigvuldigen met een scalar: $-3\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \cdot 3 \\ -3 \cdot -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$. Zie ook figuur 5, pagina 26.
   - Wiskundige rekenregels (pagina 27):
     - **u** + **v** = **v** + **u**
     - (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)
     - **u** + **0** = **0** + **u**
     - **-u** = (-1)**u**
       u + (**-u**) = **-u** + **u** = **0**
     - c(**u** + **v**) = c**u** + c**v**
     - (c + d)**u** = c**u** + d**u**
     - c(d **u**) = (cd) **u**

            - $1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$
        - Lineaire combinaties (pagina 27):
            - $\mathbf{y} = c_1\mathbf{v_1} + \ldots + c_p\mathbf{v_p}$
              Een lineaire combinatie van $\mathbf{v_1} \ldots \mathbf{v_p}$ met gewichten $c_1 \ldots c_p$. Waarbij c_p elk reeël getal kan zijn, bijvoorbeeld: $\sqrt{3}\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ of $0\mathbf{v_1} + \frac{1}{4}\mathbf{v_2}$.
              Figuur 3, pagina 26 en figuur 8, pagina 28 geven een idee van de structuur die hierdoor ontstaat.
            - Een lineaire combinatie bestaat als er een oplossing voor $c_1 \ldots c_p$ bestaat in de vergelijking: $\mathbf{y} = c_1\mathbf{v_1} + \ldots + c_p\mathbf{v_p}$.
              $$x_1 \overset{a_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}} + x_2 \overset{a_2}{\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}} = \overset{b}{\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{array}$$ (Pagina 28, 29)
            - De vectorvergelijking en aangevulde matrix hebben hetzelfde antwoord.
              $$x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{b} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \cdots & \boldsymbol{a_n} & \boldsymbol{b} \end{array}\right]$$ (Pagina 29)
        - Lineaire deelruimte (Span) (pagina 30):
            - Als $\mathbf{v_1} \ldots \mathbf{v_p}$ een serie vectoren in $\mathbb{R}^n$ is, dan wordt de set van alle combinaties van $\mathbf{v_1} \ldots \mathbf{v_p}$ weergegeven als Span$\{\mathbf{v_1} \ldots \mathbf{v_p}\}$, de verzameling van alle vectoren die geschreven kunnen worden als: $\mathbf{y} = c_1\mathbf{v_1} + \ldots + c_p\mathbf{v_p}$.
            - De Span$\{\mathbf{v}\}$ is de set van punten in $\mathbb{R}^n$ op de lijn door $\mathbf{0}$ en $\mathbf{v}$. Figuur 10, pagina 30 geeft een idee van een lineaire deelruimte van een enkele vector.
            - De Span$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ is het vlak van punten in $\mathbb{R}^n$ op de lijn door $\mathbf{0}$, $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$. Figuur 11, pagina 30 geeft een idee van een lineaire deelruimte van twee vectoren.
        - Lengte van de vector: $|\boldsymbol{v}| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ en $|c\,\boldsymbol{v}| = |c| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$.
    - Matrix-vectorproduct: $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ (Lay: §1.4)
        - Met A een $m \times n$ matrix met kolommen $\mathbf{a_1} \ldots \mathbf{a_n}$ en $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^n$, is het product van A en $\mathbf{x}$ de lineaire combinatie van de kolommen van A met $\mathbf{x}$ als de gewichten.
          $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$ (Pagina 35)
          De *i*de rij van **b** is de optelsom van de *i*de rij van *A* vermenigvuldigd met **x**. (Pagina 38)
        - Hierdoor geldt ook: $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \rightarrow x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{b} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \cdots & \boldsymbol{a_n} & \boldsymbol{b} \end{array}\right]$ en dat $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ alleen bestaat als **b** een lineaire combinatie is van de kolommen van *A*. (Pagina 36)
          Zie ook Example 3 op pagina 36.
        - Stel *A* is een $m \times n$ matrix, dat gelden de volgende beweringen: (Pagina 37)
            - Voor elke **b** in $\mathbb{R}^m$ heeft $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ een oplossing.
            - Elke **b** in $\mathbb{R}^m$ is een lineaire combinatie van de kolommen van *A*.
            - De kolommen van *A* spannen $\mathbb{R}^m$.
            - *A* heeft een pivot positie in elke rij.
        - Eigenschappen van het vectorproduct: (Pagina 39)
            - $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\text{v}$
            - $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$
    - Stelsel lineaire vergelijkingen (Lay: §1.5)
        - Een homogeen lineair systeem heeft tenminste één oplossing voor $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$, de 'triviale oplossing' $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ en eventueel een niet-triviale oplossing. (Pagina 43)
            - Een homogene vergelijking $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ heeft alleen een niet-triviale oplossing als er

tenminste één vrije variabele is.

- Example 1, pagina 43:

$$\begin{matrix} 3x_1 & +5x_2 & -4x_3 & =0 \\ -3x_1 & -2x_2 & +4x_3 & =0 \\ 6x_1 & +x_2 & -8x_3 & =0 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{matrix} x_1 & & -\frac{4}{3}x_3 & =0 \\ & x_2 & & =0 \\ & & 0 & =0 \end{matrix}$$

Hieruit volgt $x_1 = {}^4/_3 x_3$; $x_2 = 0$ en x_3 is vrij.

- Parametervorm (Pagina 44)
  - Parametervorm **x** = *s***u** + *t***v**.
- <u>Samenvatting hier incompleet!</u>

- Lineaire (on)afhankelijkheden van een set vectoren. (Lay: §1.7)
  - Een set vectoren is lineair onafhankelijk als $\mathbf{0} = x_1\mathbf{v_1} + \ldots + x_p\mathbf{v_p}$ alleen de triviale oplossing heeft ($\mathbf{x}=\mathbf{0}$).
    Een set vectoren is lineair afhankelijk als er gewichten ($c_1 \ldots c_p$, anders dan de triviale oplossing) bestaan waarvoor geldt $\mathbf{0} = c_1\mathbf{v_1} + \ldots + c_p\mathbf{v_p}$. (Pagina 56)
  - De kolommen van A zijn lineair onafhankelijk als $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alleen de triviale oplossing heeft. (Pagina 57)
  - <u>Samenvatting hier incompleet!</u>
- Lineaire transformaties (Lay: §1.8)
  - Een transformatie T van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$ bepaald voor elke vector **x** in $\mathbb{R}^n$ een vector T(**x**) in $\mathbb{R}^m$ (T: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$). (Pagina 63)
    - De set $\mathbb{R}^n$ is het domein van T en $\mathbb{R}^m$ het codomein van T.
    - Voor elke **x** in $\mathbb{R}^n$ bestaat een afbeelding T(**x**) in $\mathbb{R}^m$.
    - De verzameling van alle afbeeldingen van T(**x**) is de *range* van T.
  - Een transformatie is lineair als geldt: (Pagina 65, 66)
    - T(**0**) = **0**
    - T(**u** + **v**) = T(**u**) + T(**v**), voor elke **u** en **v** in het domein van T.
      T(c**u** + d**v**) = cT(**u**) + dT(**v**), voor alle scalars c en d en elke **u** en **v** in het domein van T. (Via T(c**u** + d**v**) = T(c**u**) + T(d**v**) = cT(**u**) + dT(**v**).)
    - T(c**u**) = cT(**u**), voor elke scalar c en elke **u** in het domein van T.
- Lineaire transformatie matrix (Lay: §1.9)
  - Als T: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dan bestaat er een unieke matrix A waarmee T(**x**) = A**x** voor elke **x** in $\mathbb{R}^n$. A is de $m \times n$ matrix waarvan de $j$de kolom de vector T($\mathbf{e}_j$) is, waar $\mathbf{e}_j$ de $j$de kolom is van de identiteitsmatrix. $A = [T(\boldsymbol{e}_1) \cdots T(\boldsymbol{e}_n)]$ (Pagina 71)
  - Rotaties rond de oorsprong: $A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. Positieve φ is tegen de klok in.
  - Standaard matrices: (Pagina 73)
    - Spiegeling over de x_1-as (x-as): $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
    - Spiegeling over de x_2-as (y-as): $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
    - Spiegeling over de lijn x_1=x_2: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
    - Spiegeling over de lijn x_2=-x_1: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
    - Spiegeling in de oorsprong: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

- Horizontale krimp en uitrekking: $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- Verticale krimp en uitrekking: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.
- Horizontale shear: $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- Verticale shear: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$.
- Projectie op de x_1-as (x-as): $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- Projectie op de x_2-as (y-as): $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is 'onto' $\mathbb{R}^m$ als elke **b** in $\mathbb{R}^m$ de afbeelding is van tenminste een **x** in $\mathbb{R}^n$. (Pagina 75) Maar slechts als de kolommen van A $\mathbb{R}^m$ omspannen.
- T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is een-op-een als elke **b** in $\mathbb{R}^m$ de afbeelding in van ten hoogste een **x** in $\mathbb{R}^n$. Zie ook figuur 4, pagina 76.
  T is alleen een-op-een als T(**x**) = **0** alleen de triviale oplossing heeft, de kolommen van *A* zijn dus lineair onafhankelijk.

- Matrixbewerkingen (Lay: §2.1)
  - A, B en C zijn matrices van dezelfde grote, r en s zijn scalars. Dan geldt: (Pagina 93)
    - A + B = B + A
    - (A + B) + C = A + (B + C)
    - A + 0 = A
    - r(A + B) = rA + rB
    - (r + s)A = rA + sA
    - r(sA) = (rs)A
  - Matrixvermenigvuldigingen: (Pagina 94)
    $B\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b_1} + \cdots + x_p\boldsymbol{b_p}$ en $A(B\boldsymbol{x}) = A(x_1\boldsymbol{b_1}) + \cdots + A(x_p\boldsymbol{b_p}) = x_1 A\boldsymbol{b_1} + \cdots + x_p A\boldsymbol{b_p}$
    en $AB = A\begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \cdots & \boldsymbol{b_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b_1} & A\boldsymbol{b_2} & \cdots & A\boldsymbol{b_p} \end{bmatrix}$ dus
    $(AB)x = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b_1}x_1 & A\boldsymbol{b_2}x_2 & \cdots & A\boldsymbol{b_p}x_p \end{bmatrix}$.
    - Elke kolom van AB is een lineaire combinatie van de kolommen van A met de gewichten van de corresponderende rij in B. (Pagina 95)
    - Als A is *m*×*n*, dan moet B *n*×*o* zijn en is AB *m*×*o*.
    - $AB = \begin{bmatrix} A\boldsymbol{b_1} & \cdots & A\boldsymbol{b_p} \end{bmatrix}$ Hieruit volgt: $(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{j2} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ en $\text{rij}_i(AB) = \text{rij}_i(A) \cdot B$. (Pagina 96, 97)
    - Eigenschappen: (Pagina 97)
      - A(BC) = (AB)C
      - A(B + C) = AB + AC
      - (B + C)A = BA + CA
      - r(AB) = (rA)B = A(rB), voor elke scalar r.
      - $I_m A = A = Ai_m$

      Enkele uitzonderingen: (Pagina 98)
      - AB ≠ BA, in de meeste gevallen.
      - Als AB = AC, is B niet per definitie C.
      - Als AB = 0_m, dan is A of B niet noodzakelijk 0_m.
  - Machten van matrices (A^k): (Pagina 99)
    Samenvatting hier incompleet!
  - Getransponeerde van eem matrix (A^T): (Pagina 99)
    $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

Eigenschappen:
- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(rA)^T = rA^T$, voor elke scalar r.
- $(AB)^T = B^T A^T$, let op: omgekeerde volgorde!

- Samenvatting hier (mogelijk) incompleet!

- Inverse van een matrix (Lay: §2.2)
  - $A^{-1}A = I$ en $AA^{-1} = I$ (Pagina 103)
  - $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ of $\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$ vegen totdat links de identiteitsmatrix staat. De rechterkant is dan de geïnverteerde matrix. (Pagina 108)
  - det A = ad – bc
    Een 2×2 matrix is alleen inverteerbaar als det A ≠ 0.
  - Voor elke inverteerbare $n \times n$ matrix A geldt dat voor elke **b** in $\mathbb{R}^n$ de vergelijking $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ de unieke oplossing $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{b}$ heeft. (Pagina 104)
  - Rekenregels: (Pagina 105)
    - $(A^{-1})^{-1} = A$
    - $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

    Bovenstaande regels zijn vergelijkbaar met de regels voor getransponeerde matrices.
    - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
    - Het product van twee $n \times n$ matrices is inverteerbaar.
  - Elementaire matrices (Pagina 106)
    Een (identiteits)matrix E waarop één bewerking is toegepast. Deze bewerking kan op matrix A worden toegepast: EA.
    Elke elementaire matrix is inverteerbaar.
- Eigenschappen van inverteerbare matrices (Lay: §2.3)
  - Eigenschappen van een inverteerbare matrix, allen waar of allen onwaar: (Pagina 112)
    - A is een inverteerbare matrix.
    - A is rij-equivalent met de $n \times n$ identiteitsmatrix.
    - A heeft n pivot posities.
    - De vergelijking $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ heeft alleen de triviale oplossing.
    - De kolommen van A zijn lineair onafhankelijk.
    - De lineaire transformatie van $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ is een-op-een.
    - De vergelijking $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ heeft tenminste een oplossing voor elke **b** in $\mathbb{R}^n$.
    - De kolommen van A omspannen $\mathbb{R}^n$.
    - De lineaire transformatie van $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ projecteert $\mathbb{R}^n$ op $\mathbb{R}^n$.
    - Er bestaat een $n \times n$ matrix C waarvoor geldt: $CA = I$.
    - Er bestaat een n×n matrix D waarvoor geldt: $AD = I$.
    - A^T is een inverteerbare matrix.
  - Als voor de vierkante matrices A en B geldt $AB = I$, dan zijn A en B inverteerbaar met $B = A^{-1}$ en $A = B^{-1}$.
  - De lineaire transformatie T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is inverteerbaar als er een transformatie S: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bestaat waarvoor geldt: $S(T(\mathbf{x})) = x$ en $T(S(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ voor alle **x** in $\mathbb{R}^n$.
    Als A de standaardmatrix is voor transformatie T is deze alleen inverteerbaar als A inverteerbaar is. De standaardmatrix van de geïnverteerde transformatie S is dan: A^{-1}.

- Lineaire Algebra (Lay)
  Deeltentamen III
  - Subspaces of $\mathbb{R}^n$ (Lay: §2.8)

    - Een subspace van $\mathbb{R}^n$ is elke set H in $\mathbb{R}^n$ met de volgende drie eigenschappen:
        - De nulvector bevindt zich in H.
        - Voor elke **u** en **v** in H, bevindt **u** + **v** zich ook in H.
        - Voor elke **u** in H en elke scalar c bevindt c**u** zich in H.
    - De kolomruimte van A is de set (Col A) van alle lineaire combinaties van de kolommen van A. (Als **b** zich in de Col A bevindt is [A | **b**] oplosbaar.)
    - De nulruimte van A is de set van oplossingen van de homogene vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De nulruimte van $m \times n$ matrix A is een subspace van $\mathbb{R}^n$. Bij gevolg zijn de m oplossingen van de homogene vergelijking ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) in n onbekenden een subset van $\mathbb{R}^n$.
    - De basis voor een subspace H van $\mathbb{R}^n$ is een lineair onafhankelijke set in H die H omspant.
    - De set $\{\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n\}$, gelijk aan de identiteitsmatrix $n \times n$, is de standaard basis voor $\mathbb{R}^n$.
    - De pivot kolommen van matrix A vormen de basis van de kolomruimte van A.
- Dimension and rank (= rang) (Lay: §2.9)
    - Neem $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_p\}$, de basis van subspace H. Voor elke **x** in H zijn er gewichten $c_1 \dots c_p$ waarvoor geldt $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \dots + c_p\mathbf{b}_p$.
      De vector $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^p$ is de coördinatenvector van **x** ten opzichte van $\mathcal{B}$ (de $\mathcal{B}$-coördinatenvector van **x**).
    - De dimensie van subspace H, dim H, is het aantal vectoren in elke basis van H.
      De dimensie van de nulruimte $\{\mathbf{0}\}$, is per definitie 0.
    - De rank van matrix A, rank A, is de dimensie van de kolomruimte van A.
      De rank A, is het aantal pivot-kolommen van de Col A.
    - Rank theorema
      Voor matrix A met n kolommen geldt: rank A + dim Nul $A = n$.
    - Het basis theorema
      Neem H een p-dimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^n$. Elke lineair onafhankelijke set van p-elementen in H is automatisch een basis van H. Ook is elke set van p-elementen van H die H omspannen automatisch een basis van H.
    - Vervolg op het inverse matrix theorema (Lay: §2.3):
      Neem A een $n \times n$ matrix. De volgende beweringen zijn equivalent aan de bewering dat A een inverteerbare matrix is.
        - De kolommen van A vormen een basis voor $\mathbb{R}^n$.
        - Col $A = \mathbb{R}^n$.
        - dim Col $A = n$.
        - rank $A = n$.
        - Nul $A = \{\mathbf{0}\}$
        - dim Nul $A = 0$
- Inner product, length, and orthogonality (Lay: §6.1)
    - Het inprodukt:
      $$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_1 v_2 + \cdots + u_n v_n$$
        - Rekenregels voor het inprodukt:
            - **u**·**v** = **v**·**u**
            - (**u** + **v**)·**w** = **u**·**w** + **v**·**w**

- $(c\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v})$
- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} \geq 0$
  $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0$, only if $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- Als combinatie van 2 en 3:
  $(c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_p\mathbf{u}_p)\cdot\mathbf{w} = c_1(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{w}) + \ldots + c_p(\mathbf{u}_p\cdot\mathbf{w})$

- De lengte (norm) van een vector:
  $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$ (en $\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$). Verder geldt: $\|c\,\boldsymbol{v}\| = |c|\,\|\boldsymbol{v}\|$.
- Unit vector (= eenheidsvector), een genormaliseerde vector met lengte 1: $\frac{1}{\|v\|}v$.
- De afstand tussen vectoren **u** en **v** in $\mathbb{R}^n$, dist(**u**, **v**), is de lengte van de vector **u** – **v**:
  $\text{dist}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$.
- Orthogonaliteit: de vectoren **u** en **v** zijn orthogonaal als $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. (Pagina 333)
  Verder geldt: $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$, in essentie $a^2 + b^2 = c^2$.
- Orthogonaal complement, de set van alle vectoren **z** die orthogonaal op *W* staan: $W^\perp$.
  - Een vector **x** is alleen in $W^\perp$ als ze orthogonaal staat op elke vector die *H* omspant.
  - $W^\perp$ is een deelruimte van $\mathbb{R}^n$.
  - Als $L = W^\perp$ geldt ook $L^\perp = W$.

  Het bepalen van het orthogonaal complement:
  - $(\text{Row } A)^\perp = \text{Nul } A$
  - $(\text{Col } A)^\perp = \text{Nul } A^T$
- Hoeken in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$:
  $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\cos\vartheta$

- Orthogonale sets (Lay: §6.2)
  - Neem $S = \{\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_p\}$, een orthogonale set van vectoren ($\neq \mathbf{0}$) in $\mathbb{R}^n$. Nu is *S* lineair onafhankelijk en bij gevolg de basis voor de deelruimte omspannen door *S*.
  - Een orthogonale basis voor deelruimte *W* van $\mathbb{R}^n$ is een basis voor *W* dat bij gevolg ook een orthogonale set is.
  - Neem $\{\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_p\}$, een orthogonale basis voor deelruimte *W* van $\mathbb{R}^n$. Voor elke **y** in *W* zijn de gewichten van de lineaire combinatie $\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p$ gegeven door:
    $c_j = \frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_j}{\boldsymbol{u}_j\cdot\boldsymbol{u}_j}$ (met j = 1, …, p).
  - De orthogonale projectie van **y** op **u**: $\hat{\boldsymbol{y}} = \text{proj}_L\,\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u}$.
  - Tussenstuk met illustraties (rond pagina 341)
  - Orthonormale sets, zijn orthogonale sets van eenheidsvectoren.
    Meest duidelijke voorbeeld: $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, de identiteitsmatrix.
    De lengte van een eenheidsvector is eenvoudig te controleren via: $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1 = 1$.
  - Daarnaast geldt dat *U* alleen orthonormale kolommen heeft als geldt: $U^TU = I$.
  - Als *U* een $m\times n$ matrix met orthonormale kolommen is en **x** en **y** zijn in $\mathbb{R}^n$ geldt:
    - $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$
    - $(U\mathbf{x})\cdot(U\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$
    - $(U\mathbf{x})\cdot(U\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ alleen als $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

    Het eerste en laatste criterium bewijzen dat orthogonaliteit en lengte bewaard blijven bij $\mathbf{x} \rightarrow U\mathbf{x}$. (Pagina 343)
  - Een orthogonale matrix is een inverteerbare, vierkante matrix waarvoor geldt $U^{-1} = U^T$. Naast de rijen zijn dus ook de kolommen orthonormaal! (Pagina 344)
- Orthogonal projections (Lay: §6.3)
  Het projecteren van een punt op een vlak in $\mathbb{R}^n$. Met subspace *W* en punt **y** bestaat er een

punt $\hat{\mathbf{y}}$ op W, deze orthogonale projectie is het dichtst mogelijk bij W.

- Neem W een subspace van $\mathbb{R}^n$. Elke $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$ kan dan geschreven worden als $\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$ met $\mathbf{y}$ in W en $\mathbf{z}$ in W^T. Als $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ een orthogonale basis is voor W geldt:
  $\hat{\boldsymbol{y}} = \frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_1}u_1 + \cdots + \frac{\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{u}_p}{\boldsymbol{u}_p\cdot\boldsymbol{u}_p}u_p$ and $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$.
- De vector $\hat{\mathbf{y}}$ is de orthogonale projectie van $\mathbf{y}$ op W en kan ook geschreven worden als $\text{proj}_W\, \mathbf{y}$. Zie ook figuur 2, pagina 348 en figuur 3, pagina 349.
- Als $\mathbf{y}$ zich in $W = \text{Span}\{\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_p\}$ bevindt dan is $\text{proj}_W\, \mathbf{y} = \mathbf{y}$.
- Als W een deelruimte in $\mathbb{R}^n$ is; $\mathbf{y}$ een vector in $\mathbb{R}^n$ en $\hat{\mathbf{y}}$ de orthogonale projectie van $\mathbf{y}$ op W, dan is $\hat{\mathbf{y}}$ het punt op W het dichtst bij $\mathbf{y}$. $\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| < \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$ voor alle $\mathbf{v}$ in W ongelijk $\hat{\mathbf{y}}$.
- Als $\{\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_p\}$ een orthonormale basis is voor W in $\mathbb{R}^n$ dan is: $\text{proj}_W\, \mathbf{y} = (\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \ldots + (\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p$.
  Als $U = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_p]$ dan geldt: $\text{proj}_W\, \mathbf{y} = UU^T\mathbf{y}$ voor elke $\mathbf{y}$ in $\mathbb{R}^n$.

○ The Gram-Schmidt process (Lay: §6.4)
Een algoritme voor het creëren van een orthogonale of orthonormale basis.

- The Gram-Schmidt process
  - Neem $\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_1$ en $W_1 = \text{Span}\{\mathbf{x}_1\} = \text{Span}\{\mathbf{v}_1\}$
  - Neem $\mathbf{v}_2$ als $\mathbf{x}_2$ minus zijn projectie op W_1: $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \text{proj}_{W_1}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{\boldsymbol{x}_2\cdot\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1$.
  - Schaal $\mathbf{v}_2$ naar gehele getallen ($\mathbf{v}_2'$). (Deze handeling heeft geen gevolgen voor de andere vectoren!)
  - Neem $\mathbf{v}_3$ is $\mathbf{x}_3$ minus de projectie op W_2 (= $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2'\}$):
    $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{x}_3 - \text{proj}_{v_1}\boldsymbol{x}_3 - \text{proj}_{v'_2}\boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_2 - \frac{\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{v}'_2}{\boldsymbol{v}'_2\cdot\boldsymbol{v}'_2}\boldsymbol{v}'_2$.
  - Enz. enz. enz.
    $\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{x}_2 - \frac{\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{v}_1}{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1}\boldsymbol{v}_1 - \frac{\boldsymbol{x}_3\cdot\boldsymbol{v}_2}{\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_2}\boldsymbol{v}_2 - \cdots - \frac{\boldsymbol{x}_p\cdot\boldsymbol{v}_{p-1}}{\boldsymbol{v}_{p-1}\cdot\boldsymbol{v}_{p-1}}\boldsymbol{v}_{p-1}$

  $\{v_1, \ldots, v_p\}$ is nu een orthogonale basis voor W. Daarnaast is $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \text{Span}\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ met $1 \le k \le p$. (Dus voor elk deel van de deelruimte.)
- Een orthonormale basis is te construeren uit $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ door te schalen met de lengte van $\mathbf{v}$: $\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1$, enz.
- QR-factorisatie
  Wordt niet gevraagd?

○ Least-squares problems (Lay: §6.5)
N.B.: het 'hoedje' in $\hat{x}$ is in veel gevallen vervangen door $\bar{\mathbf{x}}$.
Neem A, een $m\times n$ matrix en $\mathbf{b}$, beiden in $\mathbb{R}^m$. De kleinste kwardraten oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is $\bar{\mathbf{x}}$ in $\mathbb{R}^n$ waarvoor geldt: $\|\boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}\| \le \|\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}\|$ voor elke $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^n$.

- Op basis van de vorige paragraaf geldt: $\bar{\boldsymbol{b}} = \text{proj}_{\text{Col}\,A}\boldsymbol{b}$.
- Omdat $\bar{\mathbf{b}}$ zich in de kolomruimte van A bevindt bestaat er een $\bar{\mathbf{x}}$ in $\mathbb{R}^n$ waarvoor geldt $A\bar{x} = \bar{\mathbf{b}}$.
- Zoals eerder gezegd is $\bar{\mathbf{b}}$ het punt het dichtst bij $\mathbf{b}$ in de kolomruimte van A. De vector $\bar{x}$ is dan de kleinste kwadraten oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Elke kleinste kwadraten oplossing voldoet aan de vergelijking: $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

- Eigenschappen van de projectie $\bar{\mathbf{b}}$:
  - De projectie van $\bar{\mathbf{b}}$ staat orthogonaal op A: $\mathbf{b} - \bar{\mathbf{b}}$.
  - Bijgevolg staat $\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}$ orthogonaal op alle kolommen van A: $\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}) = 0$; en op alle rijen van A: $\mathbf{a}_j^T\cdot(\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

(Neem $\bar{\mathbf{b}} = A\bar{\mathbf{x}}$. Hieruit volgt ook dat $\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}} + (\mathrm{b} - \bar{\mathbf{b}}) = A\bar{\mathbf{x}} + (\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}})$.)
- Hieruit volgt: $A^T(\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}) = 0$ en $A^T\mathbf{b} - A^TA\bar{\mathbf{x}} = 0 \rightarrow A^TA\bar{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$.

- Als $\bar{\mathbf{x}}$ voorziet in $A^TA\bar{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$ bewijst dat $\mathbf{b} - A\bar{\mathbf{x}}$ orthogonaal staat op de rijen van A en dus ook op de kolommen van A.
- Bepalen van de kleinste kwadraten oplossing met A een $m \times n$ matrix. Geen of alle van de volgende beweringen zijn waar:
  - De vergelijking $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ heeft een unieke kleinste kwadraten oplossing voor elke $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^m$.
  - De kolommen van A zijn lineair onafhankelijk.
  - De matrix A^TA is inverteerbaar.

  De kleinste kwadraten oplossing wordt dan gegeven door $\bar{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$.
- Andere methoden om tot de kleinste kwadraten methode te komen:
  - De vector $\mathbf{b}$ projecteren op A.

    $$\hat{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{a}_1}{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1}\boldsymbol{a}_1 + \frac{\boldsymbol{b}_3 \cdot \boldsymbol{a}_2}{\boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2}\boldsymbol{a}_2 = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 \rightarrow \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$
  - Via QR-factorisatie (pagina 365)

    Zie opmerkingen §6.4.

- Applications to lineair models (Lay: §6.6)
  - $A\mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow X\boldsymbol{\beta} = \mathbf{y}$.

    Oplossen volgens zelfde methode: $X^TX\boldsymbol{\beta} = X^t\mathbf{y}$.
  - Least-Squares lines

    De meest eenvoudige lineaire vergelijking: $y = \beta_0 + \beta_1 x = mx + b$. Bij de kleinste kwadraten oplossing worden de waarden β_0 en β_1 voor dit model gevonden met de kleinst mogelijke fout op de y-as. Er vindt géén correctie plaats op de x-as!
    - X$\boldsymbol{\beta}$ = $\mathbf{y}$ met $X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.
    - De fout ten opzichte van de originele lijn (residuals): $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta}$ en $\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$.
  - De kleinste kwadraten methode en andere figuren
    - Neem het model y = $\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$.

      Voor $\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta}$ geldt nu
      $$\underset{\boldsymbol{y}}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}} = \underset{X}{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix}} \underset{\boldsymbol{\beta}}{\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}} + \underset{\boldsymbol{\epsilon}}{\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}} .$$
    - Met meer variabelen: y = $\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 v$, is de tweede kolom van X vervangen door de tweede variabele.