Uitwerking

Opg. 1 a) Er geldt: $\underline{b} \in COL(A) \iff A\underline{x} = \underline{b}$ is oplosbaar

Beschouw derhalve:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 13 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & \beta \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -5 \quad -2 \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 8 & -1 & -34 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & \beta \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -12 \end{array}\right] \begin{array}{c} \text{verwissel} \\ \text{de rijen} \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & -4 & 8 & -1 & -34 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & \beta \end{array}\right] \begin{array}{c} -1 \quad +4 \quad -1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & -82 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta+12 \end{array}\right]$$

Nu volgt: $\underline{b} \in COL(A) \iff \beta = -12$

b) Bereken: $A\underline{b} = \begin{bmatrix} 2+\beta \\ 26+13\beta \\ -4-2\beta \\ 0 \end{bmatrix}$

Nu volgt: $\underline{b} \in NUL(A) \iff A\underline{b} = \underline{0} \iff \beta = -2$

N.B. $NUL(A) = Span\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$, ook hieruit volgt: $\underline{b} \in NUL(A) \iff \beta = -2$

Opg 2 a) Noem de resp. kolommen van matrix A $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ en $\underline{a}_4$.

Dan geldt $\underline{a}_3 = \frac{2}{3}\underline{a}_1 + \frac{2}{3}\underline{a}_2$; $\underline{a}_4 = \underline{a}_2 - \underline{a}_1$ en $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ is lineair onafhankelijk.

Bijgevolg is $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ een basis van $COL(A)$.

Hieruit construeren we, m.b.v. het Gram-Schmidt-proces, een orthogonale basis $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$

Neem daartoe:

$$\underline{u}_1 = \underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_2 = \underline{a}_2 - \left(\frac{\underline{a}_2 \cdot \underline{u}_1}{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_1}\right)\underline{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{8}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 6/5 \\ -3/5 \\ -3/5 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad \text{Neem } \underline{u}_2 = \frac{5}{3}\underline{n}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nu is $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ een orthogonale basis van $\mathrm{COL}(A)$

b) Er geldt: $\underline{x} \in \mathrm{COL}(A)^{\perp} \iff \underline{x} \perp \underline{a}_1$ en $\underline{x} \perp \underline{a}_2$

$$\iff \underline{x} \cdot \underline{a}_1 = 0 \text{ en } \underline{x} \cdot \underline{a}_2 = 0 \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Beschouw nu: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -2 \end{matrix} \sim$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \times(-\tfrac{1}{3}) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -2 \end{matrix} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 \text{ is vrij} \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 \text{ is vrij} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \underline{x} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{waarbij } x_2, x_4 \in \mathbb{R}$$

Dus $\mathrm{COL}(A)^{\perp} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ en bijv.

$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ is een basis van $\mathrm{COL}(A)^{\perp}$

c) Omdat $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ een <u>orthogonale</u>

basis is van $(COL(A))^{\perp}$ is de gezochte

component: $$\left(\frac{\underline{b}\bullet\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}}\right)\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\left(\frac{\underline{b}\bullet\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}}\right)\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{2}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\left(\frac{-4}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\-2\end{bmatrix}$$

<u>N.B.</u> Uiteraard kan men ook als volgt Redeneren:

De component van $\underline{b}$ in $COL(A)$ is

$$\left(\frac{\underline{b}\cdot\underline{u}_1}{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_1}\right)\underline{u}_1+\left(\frac{\underline{b}\cdot\underline{u}_2}{\underline{u}_2\cdot\underline{u}_2}\right)\underline{u}_2=\frac{24}{10}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix}+\frac{10}{10}\begin{bmatrix}2\\2\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}12+10\\12+10\\24-9\\24-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\6\\3\\3\end{bmatrix}$$

De component van $\underline{b}$ in $(COL(A))^{\perp}$ is dus $\underline{b}-\begin{bmatrix}6\\6\\3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\-2\end{bmatrix}$

<u>Opg. 3</u>/ Invullen v/d punten geeft:

$$\begin{cases}\gamma_1-\gamma_2=0\\2\gamma_1+\gamma_2=2\\3\gamma_1-\gamma_2=4\\4\gamma_1+\gamma_2=5\end{cases}$$

In matrixvorm staat hier: $A\begin{bmatrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{bmatrix}=\underline{b}$, waarbij

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\\3&-1\\4&1\end{bmatrix} \text{ en } \underline{b}=\begin{bmatrix}0\\2\\4\\5\end{bmatrix}$$

Los vervolgens op : $A^TA\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix} = A^T\underline{b}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}30 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}36\\ 3\end{bmatrix} \Rightarrow \gamma_1 = \frac{69}{58} \text{ en } \gamma_2 = \frac{9}{58}$$

De gezochte kromme is dus $y = \frac{69}{58}\sqrt{x} + \frac{9}{58}\cos(\pi x)$

Opg 4 / a) Onjuist, immers $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \in H$ maar $(-2)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-4\\-6\end{bmatrix} \notin H$.

Dus H is niet gesloten t.a.v. het scalaire produkt $\boxtimes$

b) $$\underline{v}\cdot\underline{v}^T = \begin{bmatrix}\alpha\\1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha & 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha^2 & \alpha & 2\alpha\\ \alpha & 1 & 2\\ 2\alpha & 2 & 4\end{bmatrix} \begin{matrix}\uparrow\\ \_\,{-\alpha},{-2}\\ \downarrow\end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ \alpha & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$, dus $\underline{v}\underline{v}^T$ heeft voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$ één pivotpositie.

Dus Rang$(\underline{v}\underline{v}^T) = 1$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$

en m.b.v. het rangtheorema volgt nu dat

$\dim(\text{NUL}(\underline{v}\underline{v}^T)) = 2$ voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$

De bewering is dus juist $\boxtimes$